

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ¹

Активные силы

Силы $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, для которых известна зависимость от времени t и состояния, и на эту зависимость наложение или снятие механических связей влияние не оказывают.

Амплитудная характеристика

Зависимость модуля $R_{jk}(\Omega) = |W_{jk}(i\Omega)|$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = R_{jk}(\Omega)e^{i\psi_{jk}(\Omega)}$ от частоты Ω .

Амплитудно-фазовая характеристика

У линейной однородной системы $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$ ($A, B, C = \text{const}$) уравнений Лагранжа отыскивается решение в виде $q = ue^{i\Omega t}$. После сокращения на экспоненту, остаётся линейная однородная алгебраическая система уравнений относительно амплитуд u . А.-ф. х. $W_{jk}(i\Omega)$ – это дробь, в знаменателе которой находится определитель матрицы коэффициентов системы, а в числителе – алгебраическое дополнение элемента с номером jk .

Асимптотическая устойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, асимптотически устойчиво, если оно: 1) устойчиво по Ляпунову; 2) существует такая Δ -окрестность точки $x = 0$ (область притяжения), что для общего решения $x(t, t_0, x_0)$ выполняется: $\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0\}$.

Валентность

Число $c \neq 0$ в основном критерии каноничности преобразования гамильтоновых переменных.

Вариационная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$, связанное с функцией

Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ следующим образом $L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}}$ (или в

симметричном виде $L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) d\hat{t} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$).

Вариационный принцип Гамильтона [1, 9] (начало Гамильтона [1], принцип Гамильтона [12, 16], принцип Гамильтона-Остроградского [10, 11], принцип стационарного действия Гамильтона [3, 4, 7])

Путь $\hat{q}(t)$ в расширенном координатном пространстве является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t, \alpha)$ при неизменных граничных точках для вариации действия по Гамильтону выполняется $\delta W|_{\alpha=0} = 0$.

¹ При отсутствии ссылок понятие рассмотрено в [16]. Терминология по возможности уточнялась по сборникам терминов [13, 15].

Варьирование функции (проварьировать функцию)

Включение функции $\tilde{q}(t)$ в гладкое семейство функций $q(t, \alpha)$ ($q(t, 0) = \tilde{q}(t)$).

Вариация функции

Дифференциал *проварьированной функции* по параметру α .

Вековое уравнение (уравнение частот)

Многочленное уравнение для разрешённых частот *гармонических колебаний* при решении задачи *малых (линейных) колебаний*.

Виртуальное перемещение точки

Дифференциал *радиус-вектора*, не противоречащий уравнениям *механических связей* при фиксированном в уравнениях времени t .

Внешнее воздействие (входное воздействие)

Обобщённая сила, зависящая только от времени t .

Возможные скорости

Скорости точек системы при движении, не нарушающем наложенные на систему *механические связи*.

Возможные перемещения

Дифференциал *радиус-вектора*, не противоречащий уравнениям *механических связей*. Дифференциал *радиус-вектора*, согласованный с *возможной скоростью*.

Входное воздействие

То же, что *внешнее воздействие*.

Вынужденное движение (выход системы, отклик системы, реакция системы, установившийся процесс)

Движение, вызванное *внешним (входным) воздействием*, после затухания влияния начального состояния.

Выход системы

То же, что *вынужденное движение*.

Гамильтониан (функция Гамильтона)

Функция $H(t, q, p)$ *гамильтоновых переменных*, которая определяет правую часть *гамильтоновой системы*. Гамильтониан связан с лагранжианом

следующим образом:
$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L.$$

Гамильтонова система (уравнения Гамильтона, канонические уравнения Гамильтона)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$
 правая часть которой определена функцией Гамильтона

$H(t, q, p)$.

Гамильтоновы переменные (переменные Гамильтона)

Совокупность переменных: время t , *обобщенные координаты* q_i , *обобщенные импульсы* p_i .

Гармоническое воздействие

Внешнее (входное) синусоидальное воздействие с некоторыми амплитудой, частотой и фазой.

Геометрическая связь (голономная связь, конечная связь)

Механическая удерживающая связь $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$, уравнение которой представимо в виде функции от времени t и от положения $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ точек системы.

Гироскопическая система

Механическая система называется гироскопической при выполнении следующих условий: система стационарно задана; потенциальная энергия зависит только от обобщённых координат; мощность непотенциальных сил равна нулю.

Главная функция Гамильтона $W(t, q, q^0)$

Действие по Гамильтону W вычисляется на общем решении $q(t, q^0, p^0)$ уравнений Гамильтона. В результат вычисления подставляется найденная из общего решения вектор-функция $p^0 = p^0(t, q, q^0)$.

Главное колебание

Все координаты изменяются синусоидально с одинаковыми частотой и фазой, но, возможно, с разными амплитудами.

Главные координаты (нормальные координаты)

Координаты θ_i , в которых кинетическая энергия имеет вид $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2$, а

потенциальная – $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i \theta_i^2$, $r_i = \text{const}$.

Годограф Михайлова

В многочлен $f(\lambda)$ подставляется вместо переменной λ мнимая переменная $i\omega$, затем выделяются действительная и мнимая часть $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, и при изменении $0 \leq \omega < \infty$ на комплексной плоскости (u, v) изображается кривая.

Голономная связь

То же, что геометрическая связь.

Голономная система

Механическая система, на которую наложены геометрические (голономные, конечные) связи.

Группа вариационных симметрий

Группа преобразований, все преобразования которой вариационные симметрии.

Действие по Гамильтону

Функционал $W = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})|_{q=q(t)} dt$, который ставит в соответствие функции $q(t)$, определённой на интервале $[t_0, t_1]$, число $(L(t, q, \dot{q}) - \text{функция Лагранжа})$.

Действие по Лагранжу

Функционал $W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P(t, q, q')|_{q=q(q_1)} dq_1$, который ставит в соответствие функции $q(q_1)$, определённой на интервале $[q_1^0, q_1^1]$, число $(P(t, q, q') - \text{функция Якоби})$.

Действительная характеристика

Зависимость действительной части $P_{jk}(\Omega) = \text{Re}W_{jk}(i\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = P_{jk}(\Omega) + iS_{jk}(\Omega)$ от частоты Ω .

Дивергентная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \bar{t}, \bar{q}$, связанное с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ следующим образом $L\left(\bar{t}, \bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right) + \frac{df(\bar{t}, \bar{q})}{d\bar{t}} = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\bar{t}}$ (или в симметричном виде $L\left(\bar{t}, \bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right) d\bar{t} + df(\bar{t}, \bar{q}) = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$).

Диссипативная система

Система называется диссипативной при выполнении следующих условий: система *стационарно задана*; потенциальная энергия зависит только от *обобщённых координат*; мощность непотенциальных сил неположительна. При выполнении более строгого условия: мощность непотенциальных сил отрицательна, если для *обобщённых скоростей* справедливо $\dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2 \neq 0$, – система называется *определённо-диссипативной*.

Диссипативная функция Релея $\Phi(t, q, \dot{q})$

Квадратичная форма $\Phi(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n b_{il}(t, q) \dot{q}_i \dot{q}_l$, при помощи которой часть

обобщённых сил выражается следующим образом $Q_i^* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$.

Дифференциальные связи

Механические связи, условия $f_l(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых содержат скорости \mathbf{V}_i материальных точек.

Замкнутая система

Механическая система, материальные точки которой взаимодействуют только с точками, принадлежащими системе.

Знакоопределённые функции

Положительно определённые, отрицательно определённые функции.

Знакопостоянные функции

Положительно постоянные, отрицательно постоянные функции.

Знакопеременные функции

Функции, принимающие в любой окрестности нуля как положительные, так и отрицательные значения.

Идеальная связь

Такая *геометрическая связь*, что *обобщённые силы*, соответствующие *реакциям связи*, равны нулю. Эквивалентное определение: на любом *виртуальном перемещении* системы элементарная работа сил *реакции связи* равна нулю.

Изохронный дифференциал $\delta F(t, q)$

Дифференциал при фиксированном времени t :
$$\delta F(t, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i .$$

Инволютивная система (система в инволюции)

Система функций $\varphi_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, m}$, *гамильтоновых переменных*, для *скобок Пуассона* которых выполняется $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i, j = \overline{1, m}$.

Интегральный инвариант

Определённый интеграл от функции *гамильтоновых переменных*, не меняющий своего значения при переносе области интегрирования определённым образом согласованно с *фазовым потоком гамильтоновой системы*.

Интегральный инвариант Пуанкаре

Контурный интеграл $\oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i$, не меняющий своего значения при переносе контура C *фазовым потоком гамильтоновой системы*.

Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана

Контурный интеграл $\oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t$: по любым двум *согласованным контурам* C_0 и C_1 , охватывающим *трубку прямых путей*, интеграл принимает одно и то же значение. Трубка порождается *функцией Гамильтона H* , входящей в подынтегральное выражение,

Интегрируемая дифференциальная связь

Уравнение дифференциальной связи $f_1(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) = 0$ допускает эквивалентную замену уравнением геометрической связи. Например, уравнение $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$ заменяется уравнением $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{c} = 0$.

Канонические уравнения Гамильтона

То же, что *гамильтонова система*.

Каноническое преобразование

Такое неособенное преобразование $\tilde{q} = \tilde{q}(t, q, p)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(t, q, p)$ гамильтоновых переменных, что указанная замена переменных в любой гамильтоновой системе приводит к гамильтоновой системе.

Кинетический фокус (сопряжённые кинетические фокусы)

Две точки (t_0, q^0) , (t_f, q^f) расширенного координатного пространства R^{n+1} , расположенные на решении $q(t) = q(t, t_0, q^0, \dot{q}^0)$ уравнений Лагранжа, называются сопряжёнными кинетическими фокусами, если справедливо

$$\text{равенство } \det \left\| \frac{\partial q_i(t_f, t_0, q^0, \dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0} \right\| = 0.$$

Конечная связь

То же, что геометрическая связь.

Конечномерная механическая система

Система, состоящая из конечного числа материальных точек и конечного числа твёрдых тел. Эквивалентное определение: механическая система с конечным числом степеней свободы.

Консервативная система

Система называется консервативной при выполнении следующих условий: система стационарно задана; потенциальная энергия зависит только от обобщённых координат; непотенциальные силы отсутствуют.

Конфигурационное многообразие

Разрешённые связями положения механической системы, заданные в некотором пространстве, например, в прямом произведении декартовых координат отдельных точек системы.

Конформная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$, связанное с функцией

$$\text{Лагранжа } L(t, q, \dot{q}) \text{ следующим образом } L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = cL(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}} \quad c = \text{const}$$

$$(\text{или в симметричном виде } L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) d\hat{t} = cL\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt).$$

Координатное пространство

n -мерное пространство с координатами q_1, \dots, q_n (обобщённые координаты).

Критерий Михайлова

Многочлен степени n устойчив тогда и только тогда, когда для приращения аргумента θ у годографа Михайлова выполняется $\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = n \frac{\pi}{2}$.

Критерий равновесия стационарно заданной системы (принцип возможных перемещений)

Положение \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$, (q_k^0 , $k = \overline{1, n}$) стационарно заданной системы с идеальными связями является положением равновесия тогда и только тогда, когда на любом возможном перемещении $d\mathbf{r}_i$ из этого положения для

элементарной работы *активных сил* \mathbf{F}_i выполняется

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^n Q_k(t, q^0, 0) dq_k = 0. \quad \text{Эквивалентная формулировка:}$$

положение \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$, $(q_k^0, k = \overline{1, n})$ *стационарно заданной системы с идеальными связями* является *положением равновесия* тогда и только тогда, когда для *обобщённых сил* тождественно по времени t выполняется $Q_k(t, q^0, 0) = 0$.

Критерий Рауса-Гурвица

Многочлен устойчив тогда и только тогда, когда все *главные центральные миноры определителя Гурвица* положительны.

Лагранжева система (уравнения Лагранжа)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вычисляется или, исходя из кинетической энергии $T(t, q, \dot{q})$ и *обобщённых сил* $Q_i(t, q, \dot{q})$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \text{ или, исходя из лагранжиана } L(t, q, \dot{q}): \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Лагранжевы переменные (переменные Лагранжа)

Совокупность переменных: время t , *обобщенные координаты* q_i , *обобщенные скорости* \dot{q}_i .

Лагранжиан (функция Лагранжа)

Функция $L(t, q, \dot{q})$ *лагранжевых переменных*, при помощи которой вычисляются *уравнения Лагранжа*. *Лагранжиан* связан с *гамильтонианом*

следующим образом: $L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H$.

Малые колебания (линейные колебания)

Движение консервативной системы в окрестности *устойчивого положения равновесия*. *Движение* определяется *линейными уравнениями Лагранжа* и является – *линейной комбинацией главных колебаний*.

Материальная точка

Точка, которой поставлено в соответствие положительное число – масса m .

Механическая система

Система, состоящая из *материальных точек*.

Механические связи

Ограничения $f_l(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$, наложенные на *состояния* механической системы, справедливые для начальных состояний и во время движения.

Мнимая характеристика

Зависимость мнимой части $S_{jk}(\Omega) = \text{Im} W_{jk}(i\Omega)$ *амплитудно-фазовой характеристики* $W_{jk}(i\Omega) = P_{jk}(\Omega) + iS_{jk}(\Omega)$ от частоты Ω .

Натуральная система

Система, динамика которой описывается *уравнениями Лагранжа* с *функцией Лагранжа* $L = T - V$ (T – кинетическая энергия, V – *обобщённый потенциал*).

Начало Гамильтона [1]

То же, что *вариационный принцип Гамильтона*.

Ненатуральная система

Лагранжева система вычисляется, исходя из лагранжиана $L(t, q, \dot{q})$:

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, но в отличие от *натуральной системы лагранжиан*

$L(t, q, \dot{q})$ не есть кинетическая минус потенциальная энергии.

Необходимое условие устойчивости многочлена

Если *многочлен* $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$, $a_0 > 0$, *устойчив*, то для его коэффициентов выполняется: $a_1 > 0, \dots, a_m > 0$.

Нестационарно заданная система

Положения $\mathbf{r}_i(t, q)$ точек *механической системы* есть вектор-функции не только *обобщённых координат*, но и явно времени t .

Нестационарные связи (реономные связи)

Механические связи, условия $f_i(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых содержат явно время t .

Неудерживающая связь

Ограничение $f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ типа неравенства, наложенное на состояния механической системы.

Неустойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в *нормальном виде* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, неустойчиво по Ляпунову, если для общего решения $x(t - t_0, x_0)$ выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists |x_0| < \delta, \exists t_1 \geq t_0, |x(t_1 - t_0, x_0)| \geq \varepsilon.$$

Нормальные координаты

То же, что *главные координаты*.

Область притяжения

Такая Δ -окрестность решения $x \equiv 0$ системы в *нормальном виде* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, что для общего решения $x(t - t_0, x_0)$ выполняется: $\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t - t_0, x_0) = 0\}$.

Обобщённая сила

Положение любой точки механической системы выражено как функция $\mathbf{r}_i(t, q)$ времени и *обобщённых координат*. Обобщённая сила, соответствующая координате q_k , определяется выражением

$$Q_k = \sum_i \left(\mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right), \text{ где } \mathbf{F}_i \text{ — сила, приложенная к точке } \mathbf{r}_i. \text{ Эквивалентное}$$

определение: коэффициент при δq_k в элементарной работе

$$\delta A = \sum_i (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = \sum_k Q_k \delta q_k \text{ на виртуальных перемещениях системы.}$$

Обобщённо консервативная система

Гамильтонова система, у которой функция Гамильтона $H(q, p)$ явно не зависит от времени t . Обобщённо консервативная система порождает *первый интеграл* $H(q, p) = c$ соответствующей гамильтоновой системы.

Обобщённые импульсы p_i

Определяются через функцию Лагранжа: $p_i = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}$.

Обобщённые координаты q_i

Координаты q_1, \dots, q_n , определяющие допустимые наложенными на систему связями положения механической системы и удовлетворяющие следующим требованиям:

- 1) числа q_1, \dots, q_n в момент времени t находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями, допустимыми связями;
- 2) координаты q_1, \dots, q_n независимы – можно изменять одну из них при фиксированных других;
- 3) при изменении одной координаты q_j в пространстве, в котором задаётся произвольное положение системы, вычерчивается координатная линия и касательный вектор \mathbf{H}_j к ней в точке q^0 , векторы $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$ должны быть линейно независимы.

Обобщённые скорости \dot{q}_i

Производные по времени t от обобщённых координат q_i .

Обобщённый потенциал

Функция $V(t, q, \dot{q})$, связанная с обобщёнными силами Q_k следующим

выражением: $Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$.

Обратная задача лагранжева формализма

Возможно ли конкретную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка эквивалентно (не меняя множества решений) заменить уравнениями Лагранжа? При положительном ответе проделать эту замену.

Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Теоремы утверждают: если для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде имеет место инвариантность интеграла Пуанкаре (или Пуанкаре-Кармана), то система уравнений – гамильтонова.

Общее уравнение динамики

Для механических систем с идеальными связями справедливо динамическое

уравнение $\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{W}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = 0$, где m_i – масса отдельной точки, \mathbf{W}_i –

ускорение точки, \mathbf{F}_i – активная сила, приложенная к точке, $\delta \mathbf{r}_i$ – произвольное виртуальное перемещение из этой точки.

Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений)

Механическая система с идеальными связями находится в положении равновесия \mathbf{r}_i^0 тогда и только тогда, когда в положении \mathbf{r}_i^0 справедливо

уравнение $\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = 0$, где \mathbf{F}_i – активные силы, приложенные к точкам

\mathbf{r}_i^0 , $\delta \mathbf{r}_i$ – произвольное виртуальное перемещение из \mathbf{r}_i^0 [11].

Одномерное тело

Твёрдое тело, которому соответствует одномерная выпуклая оболочка.

Однопараметрическая группа преобразований

Общее решение $\bar{x} = \bar{x}(x, t)$ системы обыкновенных дифференциальных автономных (стационарных) уравнений в нормальном виде $\dot{\bar{x}} = \varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$, при начальных условиях $\bar{x}(0) = x$.

Окольный путь

График движения в одном из пространств (координатном, расширенном координатном и т. д.) не являющийся решением уравнений динамики (уравнений Лагранжа, уравнений Гамильтона и т. д.). Или: график движения $q(q_1)$ в координатном пространстве, не являющийся решением уравнений Якоби.

Определённо-диссипативная система

См. диссипативная система.

Определитель Гурвица

Строится по коэффициентам многочлена $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & & \ddots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & a_m \end{vmatrix}.$$

Размер определителя совпадает со степенью m многочлена (см. главную диагональ).

Основной критерий каноничности преобразования [5]

Преобразование $\tilde{q} = \tilde{q}(t, q, p)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(t, q, p)$ является каноническим тогда и только тогда, когда существуют такая валентность $c = \text{const}$ и такая производящая функция F , что в силу преобразования $q, p \leftrightarrow \tilde{q}, \tilde{p}$ справедливо

$$\text{тождество } \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) - dF.$$

Отделимая координата

Обобщённая координата q_k называется отделимой, если от неё и от соответствующего ей обобщённого импульса p_k функция Гамильтона зависит следующим образом:

$$H(t, z, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n), \quad z = f(q_k, p_k).$$

Отделимая координата порождает первый интеграл $f(q_k, p_k) = c$ соответствующей гамильтоновой системы.

Отклик системы

То же, что вынужденное движение.

Отрицательно определённая функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ < 0, & x \neq 0. \end{cases}$

Отрицательно постоянная функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \leq 0$.

Первый интеграл

Функция $f(t, x)$, которая при подстановке в неё любого решения $x(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, сохраняет как функция t своё значение: $f(t, x(t)) = f(t_0, x_0) = \text{const}$.

Переменные Гамильтона

То же, что гамильтоновы переменные.

Переменные Лагранжа

То же, что лагранжевы переменные.

Переменные состояния

Переменные, определяющие в совокупности положения и скорости точек механической системы: обобщённые координаты q_i , обобщённые скорости \dot{q}_i или обобщённые координаты q_i , обобщённые импульсы p_i .

Переходной процесс

На систему в положении равновесия подаётся входное воздействие – единичная ступенька: $Q(t) \begin{cases} = 0, & t < 0, \\ = 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Переходной процесс – движение системы для значений $t \geq 0$, близких к $t = 0$ (до выхода на установившийся процесс).

Плотность статистического ансамбля

$\rho = \frac{\mu}{v}$, где v – величина малого объёма в фазовом пространстве, μ – количество находящихся в объёме экземпляров статистического ансамбля.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

Решение $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ уравнения Гамильтона-Якоби (q_1, \dots, q_n – обобщённые координаты, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – произвольные постоянные),

удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0$.

Положение равновесия

Положение механической системы называется положением равновесия, если точки системы, помещённые в это положение с нулевыми скоростями, продолжают оставаться в этом положении.

Положительно определённая функция

Для функции в некоторой области, содержащей точку $x = 0$, выполняется

$$V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Положительно постоянная функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \geq 0$.

Полуглавная функция Гамильтона $V(t, q, p^0)$

Действие по Гамильтону W вычисляется на общем решении $q(t, q^0, p^0)$ уравнений Гамильтона. В результат вычисления подставляется найденная из общего решения вектор-функция $q^0 = q^0(t, q, p^0)$.

Полусвободное каноническое преобразование

Каноническое преобразование, удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0$.

Постулат Максвелла

Поведение электромеханической системы определяется уравнениями Лагранжа, в которые кроме обобщённых сил подставлены функции: кинетическая энергия, потенциальная энергия, диссипативная функция Релея. Все указанные функции есть суммы соответствующих функций для электрической части системы и для механической.

Преобразование симметрии в дифференциальном уравнении

Преобразование переменных, переводящее любое решение дифференциального уравнения в его решение.

Принцип виртуальных перемещений

То же, что общее уравнение статики.

Принцип возможных перемещений

То же, что критерий равновесия стационарно заданной системы.

Принцип Гамильтона [12, 16]

То же, что вариационный принцип Гамильтона.

Принцип Гамильтона-Остроградского [10, 11]

То же, что вариационный принцип Гамильтона.

Принцип Мопертюи-Лагранжа

Путь $\tilde{q}(q_1)$ в координатном пространстве является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(q_1, \alpha)$ при неизменных граничных точках для вариации действия по Лагранжу выполняется $\delta W^*|_{\alpha=0} = 0$.

Принцип стационарного действия Гамильтона [3, 4, 7]

То же, что вариационный принцип Гамильтона.

Принцип суперпозиции

Если внешним воздействиям $Q^\alpha(t)$ на линейную систему соответствуют отклики $q^\alpha(t)$, то внешнему воздействию $\sum_\alpha Q^\alpha(t)$ соответствует отклик

$$\sum_\alpha q^\alpha(t).$$

Проварьировать функцию

То же, что варьирование функции.

Производящая функция канонического преобразования

Функция F в основном критерии каноничности преобразования гамильтоновых переменных.

Пространство состояний (фазовое пространство)

$2n$ -мерное пространство с координатами $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (обобщённые координаты, обобщённые скорости) или с координатами $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ (обобщённые координаты, обобщённые импульсы). Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде – пространство с координатами x_1, \dots, x_n .

Прямой путь

График движения в одном из пространств (координатном, расширенном координатном и т. д.) являющийся решением уравнений динамики (уравнений Лагранжа, уравнений Гамильтона и т. д.).

Радиус-вектор \mathbf{r}

Начальная точка неподвижна в системе отсчёта, конечная точка определяет положение материальной точки.

Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

В качестве полного интеграла – функции $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ многих переменных – отыскивается комбинация функций, каждая из которых является функцией одной переменных. Например, аддитивная комбинация $S = S_0(t, \alpha) + S_1(q_1, \alpha) + \dots + S_n(q_n, \alpha)$, мультипликативная комбинация $S = S_0(t, \alpha) \times S_1(q_1, \alpha) \times \dots \times S_n(q_n, \alpha)$.

Расширенное координатное пространство

$(n+1)$ -мерное пространство с координатами t, q_1, \dots, q_n (время, обобщённые координаты).

Расширенное пространство состояний (расширенное фазовое пространство)

$(2n+1)$ -мерное пространство с координатами $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (время, обобщённые координаты, обобщённые скорости) или с координатами $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ (время, обобщённые координаты, обобщённые импульсы).

Расширенное фазовое пространство

То же, что *расширенное пространство состояний*.

Реакция связей

Силы, благодаря которым выполняются наложенные на систему *механические связи*.

Реакция системы на внешнее воздействие

То же, что *вынужденное движение*.

Реонормные связи

То же, что *нестационарные связи*.

Свободное каноническое преобразование

Каноническое преобразование, удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial \bar{q}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0$.

Синхронный дифференциал [11]

То же, что *изохронный дифференциал*.

Система в инволюции

То же, что *инволютивная система*.

Система линейного приближения

Правые части *системы в нормальном виде* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, раскладывают в ряды в окрестности решения $x = 0$ и оставляют только линейные слагаемые.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

Система $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, у которой в левой части находятся производные, в правой части функции от независимой и зависимых переменных.

Система отсчёта

Трёхмерное евклидово пространство, относительно которого совершает движение *механическая система*.

Склерономные связи (стационарные связи)

Механические связи, условия $f_l(\mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых не содержат явно времени t .

Скобка Лагранжа

Сопоставление функциям *гамильтоновых переменных* $\varphi_i(t, q, p)$, $\psi_i(t, q, p)$,

$$i = \overline{1, n}, \text{ функции } [q_j, p_k] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \right).$$

Скобка Пуассона

Сопоставление двум функциям *гамильтоновых переменных* $\varphi(t, q, p)$,

$$\psi(t, q, p) \text{ функции } (\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right).$$

Собственный амплитудный вектор (форма главного колебания)

Амплитудный вектор в *главном колебании*.

Собственная частота

Частота в *главном колебании*.

Согласованные контуры

Контур C_0 и C_1 охватывают *трубку прямых путей* и параметризованы каждый параметром α так, что при каждом значении параметра α соответствующие точки контуров C_0, C_1 расположены на одном и том же *прямом пути*.

Сопряжённые кинетические фокусы

То же, что кинетические фокусы.

Состояние материальной точки

Положение и скорость точки относительно *системы отсчёта*.

Статистический ансамбль

Множество *гамильтоновых систем*, у которых совпадают *функции Гамильтона*, но различаются начальные данные q^0, p^0 .

Стационарно заданная система

Положение $r_i(q)$ любой точки *механической системы* есть функция только *обобщённых координат* (нет явной зависимости от времени t).

Стационарные связи

То же, что склерономные связи.

Структурная формула для уравнений Лагранжа

Промежуточная формула для *уравнений Лагранжа* в произвольных параметрах (не обязательно в *обобщённых координатах*).

Твёрдое тело

Такая совокупность *материальных точек*, что расстояние между любыми двумя неизменно.

Теорема Барбашина-Красовского

Пусть существует такая функция $V(x)$, что для неё в некоторой области, содержащей точку $x = 0$, и системы $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, выполняется:

1. $V(x)$ – *положительно определённая функция*;
2. $W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x \in M, \\ < 0, & x \notin M, \end{cases}$ где M – некоторое множество;
3. единственным решением, принадлежащим M при $t \in [0, \infty)$ является $x(t) \equiv 0$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ – *асимптотически устойчивое по Ляпунову* решение.

Если условие 1. заменить условием

1*. $V(0) = 0$; $\forall \delta > 0$, $\exists |x_0| < \delta$, $V(x_0) < 0$, то решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Лагранжа-Дирихле

Пусть в некоторой Δ -окрестности точки $q^0 = 0$ координатного пространства потенциальная энергия $\Pi(q)$ консервативной системы имеет в положении $q^0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q^0 = 0$ – устойчивое по Ляпунову положение равновесия.

Теорема Лиувилля о первых интегралах в инволюции

Пусть для первых интегралов $w_i(t, q, p) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, $2n$ -мерной гамильтоновой системы выполняется:

а) $(w_i, w_k) = 0$, $i, k = \overline{1, n}$, – первые интегралы находятся в инволюции;

б) уравнения $w_i(t, q, p) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, разрешимы относительно p : $p_i = \psi_i(t, q, \alpha)$.

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и квадратур, по функциям $w_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, n}$, вычисляются: полный интеграл $S(t, q, \alpha)$ уравнения Гамильтона-Якоби; дополнительные первые интегралы $w_{n+i}(t, q, p) = \alpha_{n+i}$, $i = \overline{1, n}$; общее решение $q_i(t, \alpha)$, $p_i(t, \alpha)$, $i = \overline{1, n}$, уравнений Гамильтона.

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма

Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \varphi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{условие выполнено для гамильтоновых систем}).$$

Тогда при переносе фазового объёма решениями системы сохраняется его величина.

Теорема Ли Хуачжуна

Следующие два утверждения эквивалентны:

а) интеграл $J = \oint_{C} \sum_{i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\}$ аналогично интегральному

инварианту Пуанкаре $\oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i$ – интегральный инвариант;

б) существует такое число c и такая функция $F(t, q, p)$, что подинтегральные выражения связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\} = c \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \delta F(t, q, p), \quad \text{где } \delta F(t, q, p) \text{ –}$$

изохронный (t – фиксированный параметр) дифференциал.

Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения системы в нормальном виде

Пусть в Δ -окрестности нулевого решения системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, существует положительно определённая функция $V(x)$ такая, что её производная $\dot{V}(x)$ в силу системы $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, отрицательно постоянная. Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (первая)

Пусть для потенциальной энергии $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) консервативной системы в некотором положении q^* выполняется $\Pi_2(q^*) < 0$, где Π_2 – совокупность слагаемых в $\Pi(q)$ второго порядка (отсутствие при $q^0 = 0$ минимума, включая нестрогий). Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (вторая)

Пусть Π_m – совокупность слагаемых в потенциальной энергии $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) консервативной системы наименьшей степени $m \geq 2$, и функция $\Pi_m(q)$ отрицательно определена. Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Нётер

Пусть однопараметрическая группа $\bar{t} = \bar{t}(t, q, \tau)$, $\bar{q}_i = \bar{q}_i(t, q, \tau)$, $i = \overline{1, n}$, – группа вариационных симметрий для лагранжевой системы, определённой функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. Тогда у системы есть первый интеграл

$w = \sum_{i=1}^n p_i \eta_i - \xi H$, где p_i и H , связанные с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$

обобщённый импульс и гамильтониан, функции ξ и η_i вычисляются по

$$\text{уравнениям группы } \xi(t, q) = \left. \frac{\partial \bar{t}(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad \eta_i(t, q) = \left. \frac{\partial \bar{q}_i(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}.$$

Теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия диссипативной системы

Пусть $q^0 = 0$ – изолированное положение равновесия стационарно заданной определённо-диссипативной системы. Пусть потенциальная энергия имеет при $q^0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q^0 = 0$ – асимптотически устойчивое положение равновесия.

Теорема об угловой скорости

В каждый момент времени t существует такой единственный вектор ω (угловая скорость), что скорости любых двух точек твёрдого тела B и C связаны соотношением $V_B = V_C + [\omega, \rho]$, где $\rho = \overline{CB}$.

Теорема об устойчивости нулевого решения линейной автономной системы

$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ – корни *характеристического уравнения* линейной автономной системы $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$.

1. $\{\forall \mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0\} \Leftrightarrow \{x \equiv 0 - \text{асимптотически устойчивое решение системы } \dot{x} = Dx\}$;
2. $\{\exists \mu_k = \text{Re} \lambda_k > 0\} \Rightarrow \{x \equiv 0 - \text{неустойчивое решение системы } \dot{x} = Dx\}$;
3. $\{\mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0, k = \overline{1, r} < n, \mu_k = \text{Re} \lambda_k = 0, k = \overline{r+1, n}\} \Rightarrow \{x \equiv 0 - \text{устойчивое по Ляпунову или неустойчивое решение системы } \dot{x} = Dx\}$.

Теорема об устойчивости по линейному приближению

1. Пусть для корней $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ *характеристического уравнения системы линейного приближения* $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, выполняется $\forall \mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0$. Тогда решение $x \equiv 0$ *нелинейной системы* $\dot{x} = \varphi(x) = Dx + R(x)$ ($R(x)$ – нелинейные слагаемые) *асимптотически устойчиво*.
2. Пусть для корней $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ *характеристического уравнения системы линейного приближения* $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, выполняется $\exists \mu_k = \text{Re} \lambda_k > 0$. Тогда решение $x \equiv 0$ *нелинейной системы* $\dot{x} = \varphi(x) = Dx + R(x)$ ($R(x)$ – нелинейные слагаемые) *неустойчиво*.

Теорема Рауса-Гурвица

То же, что *критерий Рауса-Гурвица*.

Теорема Четаева о неустойчивости нулевого решения системы в нормальном виде

Пусть в ε -окрестности решения $x(t) = 0$ *системы в нормальном виде* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, существует область M (∂M – граница области M), в которой при некотором числе k для функции $V(x)$ выполняется:

1. $0 < V(x) \leq k$;
2. $W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) > 0$;
3. $\{V(x) \geq V_0\} \Rightarrow \{\exists l > 0, W(x) \geq l\}$;
4. $\{x = 0\} \in \partial M$;
5. $\{x \in \partial M, |x| < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ *системы* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$ *неустойчиво по Ляпунову*.

Теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Пусть потенциальная энергия $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) *консервативной системы* – однородная функция, и в положении q^* *системы* выполняется $\Pi(q^*) < 0$

(отсутствие при $q^0 = 0$ минимума, включая нестрогий). Тогда *положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.*

Теорема Эмми Нётер

То же, что теорема Нётер.

Теорема Якоби-Пуассона

Скобка Пуассона (φ, ψ) первых интегралов $\varphi(t, q, p) = c_1$, $\psi(t, q, p) = c_2$ гамильтоновой системы – первый интеграл той же гамильтоновой системы.

Трубка прямых путей

*В расширенном фазовом пространстве рассматривается замкнутый контур, и через каждую его точку t^0 , q^0 , p^0 – как начальную – проводится *прямой путь* – решение гамильтоновой системы.*

Угловая скорость

Вектор, существование и единственность которого устанавливается теоремой об угловой скорости.

Унивалентное каноническое преобразование

Для валентности c выполняется $c = 1$.

Удерживающая связь

Ограничение $f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) = 0$ типа равенства, наложенное на состояния механической системы.

Уравнение Гамильтона-Якоби

Строится по функции Гамильтона $H(t, q, p)$ следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0.$$

Уравнение Ляпунова

Уравнение $D^T X + XD = C$ относительно квадратной числовой матрицы X , C и D – квадратные числовые матрицы.

Уравнение частот

То же, что вековое уравнение.

Уравнения Гамильтона

То же, что гамильтонова система.

Уравнения Лагранжа

То же, что лагранжева система.

Уравнения Уиттекера

Уравнение $H(q, p) = h$, где $H(q, p)$ – функция Гамильтона обобщённо консервативной системы, разрешается относительно одного из обобщённых импульсов, например, p_1 : $p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$. Принимая обобщённую координату q_1 за независимую, по функции Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$ вычисляются уравнения Уиттекера

(гамильтонова система): $\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}$, $i = \overline{2, n}$.

Уравнения Эйлера

В вариационном исчислении *уравнения Лагранжа* называются *уравнениями Эйлера*.

Уравнения Якоби

Лагранжева системы $\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_i} - \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0$, в основе которой лежит функция

Якоби $P(q_1, q, q')$, q_1 – независимая переменная, штрих производная по ней.

Условия равновесия твёрдого тела

Некоторое положение твёрдого тела является его положением равновесия в том и только в том случае, если выполняются равенства: $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, где \mathbf{R} – главный вектор, \mathbf{M}_O – главный момент действующих на тело сил, O – произвольная точка тела.

Установившийся процесс

То же, что *вынужденное движение*.

Устойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, устойчиво по Ляпунову, если для общего решения $x(t, t_0, x_0)$ выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0, \exists \delta > 0, \forall |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0, |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Устойчивый многочлен

Многочлен в левой части характеристического уравнения

$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0$ называется устойчивым, если все корни $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ характеристического уравнения располагаются в комплексной плоскости слева от мнимой оси: $\forall \mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$.

Фазовая характеристика

Зависимость аргумента $\psi_{jk}(\Omega) = \arg W_{jk}(i\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = R_{jk}(\Omega) e^{i\psi_{jk}(\Omega)}$ от частоты Ω .

Фазовый объём

Объём в фазовом пространстве (*пространстве состояний*).

Фазовый поток гамильтоновой системы

Совокупность преобразований $q^0, p^0 \leftrightarrow q, p$ фазового пространства, которые определяются при разных фиксированных значениях времени t общим решением $q = q(t, q^0, p^0)$, $p = p(t, q^0, p^0)$ гамильтоновой системы.

Форма главного колебания

То же, что *собственный амплитудный вектор*.

Функции Ляпунова $V(x)$

Определены в некоторой Δ – окрестности нуля: $|x| < \Delta$. Для $V(x)$ предполагается $V(0) = 0$. Используются функции Ляпунова: *знакоопределённые (положительно, отрицательно), знакопостоянные (положительно, отрицательно), знакопеременные*.

Функция Гамильтона

То же, что *гамильтониан*.

Функция Лагранжа

То же, что *лагранжиан*.

Функция Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$

Результат разрешения уравнения $H(q, p) = h$ относительно одного из обобщённых импульсов, например, p_1 : $p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$.
 $H(q, p)$ – функция Гамильтона обобщённо консервативной системы.

Функция Якоби $P(q_1, q, q')$

Вычисляется по функции Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$ как лагранжиан по гамильтониану: $P(q_1, q, q') = \sum_{k=2}^n p_k q'_k - K$, q_1 – независимая

переменная, штрих – производная по ней.

Характеристический многочлен

Многочлен, расположенный в левой части *характеристического уравнения* $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0$.

Характеристическое уравнение

Решение линейной автономной системы $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, отыскивается в виде $x = ue^{\lambda t}$, после сокращения на $e^{\lambda t}$ остаётся алгебраическое уравнение $(D - \lambda E)u = 0$ для чисел λ , u . Уравнение имеет нетривиальное решение $u \neq 0$ тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет *характеристическому уравнению*

$$\det(D - \lambda E) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0.$$

Характер экстремума действия по Гамильтону

Необходимое условие минимума. Если *действие по Гамильтону* при любом *варьировании прямого пути* с закреплёнными граничными точками (t_0, q^0) , (t_1, q^1) в *расширенном координатном пространстве* достигает минимума на *прямом пути*, то при $t_0 < t < t_1$ отсутствуют *кинетические фокусы*, сопряжённые точке (t_0, q^0) .

Достаточное условие строгого минимума. Если на *прямом пути* при $t_0 < t \leq t_1$ отсутствуют *кинетические фокусы*, сопряжённые начальной точке (t_0, q^0) , то при любом нетривиальном *варьировании* $q(t, \alpha)$ ($\partial q(t, \alpha) / \partial \alpha \neq 0$) с закреплёнными граничными точками (t_0, q^0) , (t_1, q^1) в *расширенном координатном пространстве* *действие по Гамильтону* принимает на *прямом пути* строгий минимум.

Циклическая координата

Координата q_k называется *циклической*, если *функция Гамильтона* $H(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ от неё не зависит. Циклическая

координата q_k порождает *первый интеграл* $p_k = c$ соответствующей *гамильтоновой системы*.

Частотные характеристики

Совокупность характеристик: *амплитудно-фазовая, амплитудная, фазовая, действительная, мнимая*.

Число степеней свободы голономной системы

Количество *обобщённых координат*.

Электромеханическая система

Система, состоящая из взаимодействующих частей: механической и электрической.

Электромеханические аналогии

Введение для электрической цепи: кинетической и потенциальной энергий, *диссипативной функции Релея, обобщённых сил, соответствующих непотенциальным и недиссипативным силам*. На основе введённых функций вычисляются *уравнения Лагранжа* – уравнения состояния электрической цепи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А. Классическая механика: Учебное пособие. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 368 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1985. 5 – 304.
3. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – 2-е изд., пер. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256 с.
4. Бухгольц Н.В. Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. – М.: наука, 1972.
5. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механики: Учебное пособие для вузов / – 3-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 264 с.
6. Голдстейн Г. Классическая механика. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. 416 с.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. – М.: Изд-во МГУ. 1992. – 525 с.
8. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. Изд. 2-е перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.
9. Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 478 с.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
11. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 572 с.

12. Парс Л.А. Аналитическая динамика: Пер. с англ. – М.: Наука, 1971. 636 с.
13. Сборник терминов по классической механике на пяти языках: русский, немецкий, английский, французский, польский. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1965.
14. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – 3-е изд. – М.: Л.: Гостехиздат, 1946.
15. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. М.: Наука, 1984. Вып. 102.
16. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.