Лекция 2.7.
Канонические уравнения Гамильтона
Скобки Пуассона
Вариационные принципы

Пример. Уравнения динамики материальной точки в потенциальном поле. Параметризация направляющих косинусов радиус-вектора точки параметрами q_i, $i = 1,2,3$ по формулам $\alpha_i = q_i \Big/ \sqrt{\sum_{s=1}^{3} q_s^{\,2}}$ обращает условие $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\,2} = 1$ в тождество. Требование $\det \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \neq 0$ будет выполнено, если положить

$$2T = m\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^{\,2} + b\dot{\varphi}^2, \qquad \text{где } x_i = rq_i \Big/ \sqrt{\sum_{s=1}^{3} q_s^{\,2}}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\ln\sum_{s=1}^{3} q_s^{\,2} \quad \text{и}$$

$b -$произвольная константа. Величину φ можно считать одним из параметров многообразия, описывающего состояние рассматриваемой системы. Вычисления дают

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i^{\,2} \Big/ \sum_{i=1}^{3} q_i^{\,2} - r^2\sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i q_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} q_i^{\,2}\right] + \frac{1}{2}b\left(\sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i q_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} q_i^{\,2}\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2m}p_r^{\,2} + \frac{1}{2mr^2}\left[\sum_{s=1}^{3} q_s^{\,2}\sum_{i=1}^{3} p_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{3} p_i q_i\right)^2\right] + \frac{1}{2b}\left(\sum_{i=1}^{3} p_i q_i\right)^2 + \varPi(r,q).$$

Координаты q_i и импульсы p_i входят в выражение кинетической энергии $\widehat{T}$ совершенно симметрично. Потенциальная энергия как функция направляющих косинусов является однородной функцией нулевой степени координат q_i.

Частные интегралы $\sum_{i=1}^{3} p_i q_i = 0$, $\sum_{i=1}^{3} q_i^{\,2} = 1$ обеспечивают на движении совпадение координат q_i с направляющими косинусами α.

Итак, для материальной точки, движущейся в потенциальном поле, функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}p_r^{\,2} + \frac{1}{2mr^2}\sum_{s=1}^{3} q_s^{\,2}\sum_{i=1}^{3} p_i^{\,2} + \varPi(r,q).$$

1. Тождество $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \dfrac{\partial T}{\partial q^k} \equiv \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}^k}$, где $S = \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha W_\alpha^{\,2} -$ энергия ускорений системы, позволяет записывать уравнения Лагранжа при отсутствии связей в виде $\dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}^k} = F_k$, $k = \overline{1,n}$. Некая громоздкость получения выражения для энергии ускорения компенсируется простотой составления самих уравнений динамики. В таком виде они называются уравнениями Гиббса - Аппеля.

Связи $\sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \delta_{o\mu}$, $\mu = \overline{1,M}$ позволяют ввести независимые квазискорости равенствами

$$\dot{Q}^\alpha = \sum_{i=o}^{n} b_i^\alpha \omega^i \qquad \text{так, что} \qquad \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu b_i^\alpha \equiv 0, \quad i = \overline{1,n} \ .$$

Уравнения динамики $\quad \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial Q^\alpha} = F_\alpha + \sum_{\mu=1}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu, \quad \alpha = \overline{0,3N},$

преобразуем к виду $\quad \sum_{\alpha=o}^{n} b_i^\alpha \left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial Q^\alpha} \right) = \sum_{\alpha=o}^{n} b_i^\alpha F_\alpha + \delta_{oi}, \quad i = \overline{o,n}.$

В этих уравнениях $\quad \sum_{\alpha=o}^{n} b_i^\alpha \left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial Q^\alpha} \right) = \sum_{\alpha=o}^{n} \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{Q}^\alpha}\dfrac{\partial \ddot{Q}^\alpha}{\partial \dot{\omega}^i} = \dfrac{\partial S}{\partial \dot{\omega}^i}$

и $\quad \sum_{\alpha=o}^{n} b_i^\alpha F_\alpha = \Phi_i -$ обобщенная сила, коэффициент перед независимой скоростью в выражении мощности $\quad N = \sum_{\alpha=o}^{N} F_\alpha \dot{Q}^\alpha = \sum_{i=o}^{n}\sum_{\alpha=o}^{N} F_\alpha b_i^\alpha \omega^i = \sum_{i=o}^{n} \Phi_i \omega^i .$

Итак, $\quad \dfrac{\partial S}{\partial \dot{\omega}^i} = \Phi_i + \lambda_o \delta_{oi}, \quad i = \overline{o,n}, \quad \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \delta_{o\mu}, \quad \mu = \overline{0,M}.$

2. Рассмотрим еще одну форму уравнений динамики.

Связи $\sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = 0, \quad \mu = \overline{1,M},$ позволяют ввести независимые квазискорости равенствами $\quad \dot{Q}^\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i^\alpha \omega^i$ так, что $\sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu b_i^\alpha \equiv 0, \quad i = \overline{1,n},$ и исключить неопределенные множители из уравнений

$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial \hat{T}}{\partial P_\alpha}, \quad \alpha = \overline{0,N}, \qquad \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \delta_{o\mu}, \quad \mu = \overline{0,M},$$

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \hat{T}}{\partial Q^\alpha} + F_\alpha + \sum_{\mu=o}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu .$$

Исключение неопределенных множителей состоит во введении независимых импульсов $\quad p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \omega_i} = \sum_{\alpha=o}^{3N} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha}\dfrac{\partial \dot{Q}^\alpha}{\partial \omega^i} = \sum_{\alpha=o}^{3N} P_\alpha b_i^\alpha, \qquad i = \overline{1,n}.$

Эти равенства совместно с уравнениями связей, записанными в виде

$$0 = \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \frac{\partial \hat{T}}{\partial P_\alpha} = \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu A^{\alpha\beta} P_\beta, \quad \mu = \overline{n+1,3N}$$

дают систему уравнений для определения зависимостей $\quad P_\beta = P_\beta(Q,p).$

В переменных Q, p уравнения примут вид

$$\dot{Q}^o = \frac{\partial \hat{T}}{\partial P_o} = 1, \qquad \dot{P}_o = -\frac{\partial \hat{T}}{\partial Q^o} + F_o + \lambda_o ,$$

$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial \hat{T}}{\partial P_\alpha} = \sum_{\beta=o}^{3N} A^{\alpha\beta} P_\beta(Q,p), \quad \alpha = \overline{1,3N},$$

$$\dot{p}_i = \sum_{\alpha=o}^{3N} b_i^\alpha \left(F_\alpha - \frac{\partial \widehat{T}}{\partial Q^\alpha} \right) + \sum_{\alpha\beta=o}^{3N} P_\alpha \frac{\partial b_i^\alpha}{\partial Q^\beta} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial P_\beta}, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

Составим функцию Гамильтона для релятивистской частицы.

$$L = -\frac{1}{2} m_o \left(\frac{dx^o}{d\tau} \frac{dx^o}{d\tau} - \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} \right) - \frac{1}{c} \frac{dx^o}{d\tau} \Pi(x^i) \quad \rightarrow$$

$$p_o = -m_o \dot{x}^o - \frac{1}{c} \Pi(x), \qquad p_i = m_o \dot{x}^i, \quad \rightarrow$$

$$\dot{x}^o = -\frac{1}{m_o} \left[p_o + \frac{1}{c} \Pi(x) \right], \quad \dot{x}^i = \frac{1}{m_o} p_i, \quad \rightarrow$$

$$H = -\frac{1}{2m_o} \left[p_o + \frac{1}{c} \Pi(x) \right]^2 + \frac{1}{2m_o} p_i p_i\,.$$

3. Функция $f(t,q,p)$ называется интегралом уравнений динамики $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = \overline{1,n},$ если для любого движения данной системы эта функция сохраняет постоянное значение, то есть подстановка любых решений $q^i(t), p_i(t)$ в равенство $f(t,q,p) = C$ превращает его в тождество $f[t, q(t), p(t)] \equiv C$, и согласно уравнениям

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + (f\,H) \equiv 0\,.$$

Для суммы в этом выражении Пуассон ввел специальное обозначение $(f\,H)$ – скобки Пуассона.

Примером интеграла является импульс, соответствующий циклической координате. Если функция Гамильтона не содержит явно время, то $H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L$ есть интеграл.

Отметим следующие свойства скобок Пуассона.

a). $(\varphi\psi) = -(\psi\varphi)$;

b). $(c\varphi\psi) = c(\varphi\psi), \quad c = const$;

c). $(\varphi + \psi\,\chi) = (\varphi\,\chi) + (\psi\,\chi)$;

d). $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi \right) + \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$;

e). $((\varphi\psi)\chi) + ((\psi\,\chi)\varphi) + ((\chi\,\varphi)\psi) = 0.$

Первые четыре равенства проверяются непосредственными вычислениями. Последнее равенство, называемое тождеством Пуассона, устанавливается привлечением специальных соображений.

Доказательство тождества $((\varphi\psi)\chi) + ((\psi\,\chi)\varphi) + ((\chi\,\varphi)\psi) = 0\,.$

Пусть A и $B-$ дифференциальные операторы первого порядка над функцией $f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\quad Af = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_1, ..., x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Bf = \sum_{k=1}^{n} B_k(x_1, ..., x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Тогда «коммутатор» $C = AB - BA$ также будет оператором первого порядка $\quad Cf = A(Bf) - B(Af) = \sum_{k=1}^{n} [A(B_k) - B(A_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Сами скобки Пуассона $(\varphi\, f)$ можно рассматривать как применение оператора $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right)$ к функции f. Аналогичным образом операторы Ψ, X определяются функциями ψ, χ.

Формально раскрытие скобок в тождестве Пуассона дает производные каждой из функций второго порядка. Но $((\varphi\psi)\chi)$ не содержит производных второго порядка функции χ, а сумма

$$((\psi\,\chi)\varphi) + ((\chi\,\varphi)\psi) = (\psi(\varphi\,\chi)) - (\varphi(\psi\,\chi)) = (\Psi\Phi - \Phi\Psi)\chi$$

представляет собой дифференциальный оператор первого порядка относительно функции χ. Таким образом, в левую часть тождества Пуассона не входят производные второго порядка функции χ, а значит в силу симметрии и производные второго порядка функций φ, ψ. Другими словами, все члены тождества Пуассона взаимно уничтожаются. ***Тождество доказано.***

Теорема Якоби-Пуассона. *Если f и $g-$ интегралы уравнений движения, то скобки Пуассона $(f\,g)$ сохраняют постоянное значение.*

В силу равенств $\quad \frac{\partial f}{\partial t} + (f\,H) \equiv 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (g\,H) \equiv 0 \quad$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\,g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, g \right) + \left(f\, \frac{\partial g}{\partial t} \right) = -((f\,H)g) - (f(g\,H)) = ((H\,f)g) + ((g\,H)f)$$

и, используя тождество Пуассона, получаем $\quad \frac{\partial}{\partial t}(f\,g) + ((f\,g)H) = 0$.

Теорема доказана.

4. Интеграл обобщенно консервативной системы позволяет понизить порядок уравнений динамики. При условии $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$ из интеграла $H(q, p) = h$

получаем $\quad p_1 = -K(q^1, ..., q^n, p_2, ... p_n, h)$.

Рассматривая все переменные $q^j, p_j \quad j = \overline{2, n}$ как функции q^1, при фиксированном значении h из тождества

$$H[q^1, ..., q^n, -K(q^1, ..., q^n, p_2, ... p_n, h), p_2, ... p_n] \equiv h$$

имеем $$\frac{\partial H}{\partial q^j}-\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q^j}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j}=0$$ и

$$\frac{dq^j}{dt}=\frac{dq^j}{dq^1}\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{\partial H}{\partial p_j}\qquad\to\quad \frac{dq^j}{dq^1}=\frac{\partial K}{\partial p_j},$$

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{dp_j}{dq^1}\frac{\partial H}{\partial p_1}=-\frac{\partial H}{\partial q^j},\quad\to\quad \frac{dp_j}{dq^1}=-\frac{\partial K}{\partial q^j},\quad j=\overline{2,n}$$

В такой форме уравнения динамики называют уравнениями Уиттекера.

Уравнения Уиттекера имеют форму уравнений Гамильтона. Если гессиан функции K по переменным p_j, $j=\overline{2,n}$ отличен от нуля, то можно записать уравнения динамики в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dq^1}\frac{\partial P}{\partial q'^j}-\frac{\partial P}{\partial q^j}=0,\quad j=\overline{2,n},$$ где

$$P=\sum_{j=2}^{n}q'^j\widehat{p}_j-\widehat{K}=\sum_{j=2}^{n}q'^j\widehat{p}_j+\widehat{p}_1=\frac{1}{\dot{q}^1}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}^j\widehat{p}_j\,.$$

В таком виде уравнения динамики называют уравнениями Якоби.

Для натуральной системы $T+\Pi=h$,

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}^j\widehat{p}_j=2T=2(h-\Pi)=\sum_{jk=1}^{n}a_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k=\left(\dot{q}^1\right)^2\sum_{jk=1}^{n}a_{jk}q'^jq'^k=\left(\dot{q}^1\right)^2 2G$$ и

$$\frac{1}{\dot{q}^1}=\sqrt{\frac{G}{h-\Pi}},\qquad P=\frac{1}{\dot{q}^1}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}^j\widehat{p}=2\frac{h-\Pi}{\dot{q}^1}=2\sqrt{(h-\Pi)G}\,.$$

В качестве примера рассмотрим релятивистскую частицу с функцией Гамильтона $$H=-\frac{1}{2m_o}\left[p_o+\frac{1}{c}\Pi(x)\right]^2+\frac{1}{2m_o}p_ip_i=h=-\frac{1}{2}m_oc^2.$$

Решим это уравнение относительно импульса p_o

$$K=-p_o=\sqrt{(m_oc)^2+p_ip_i}+\frac{1}{c}\Pi(x)\quad\to\quad K=c\sqrt{(m_oc)^2+p_ip_i}+\Pi(x)$$

Переходя к переменным Лагранжа, получаем

$$P=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^j}{dt}}-\Pi(x).$$

5. Для голономной системы в независимых координатах функционал $W=\int_{t_0}^{t_1}L(t,q,\dot{q})dt$ называется действием по Гамильтону за промежуток времени (t_o,t_1), а выражение $L(t,q,\dot{q})dt-$элементарным действием.

Решения уравнений Лагранжа, переводящие систему из положения $M_o(t_o,q(t_o))$ в положение $M_1(t_1,q(t_1))$ называют прямым или истинным путем. Любой другой набор функций, также переводящий систему из положения $M_o(t_o,q(t_o))$ в положение $M_1(t_1,q(t_1))$, называют окольным путем. Прямой и окольный пути связаны равенством $\tilde{q}^i(t)=q^i(t)+\delta q^i(t),\quad i=\overline{1,n}$, где вариации $\delta q^i(t)-$ произвольные бесконечно малые дифференцируемые функции, обращающиеся в нуль в начальный и конечный моменты времени: $\delta q^i(t_o)=\delta q^i(t_1)=0$.

Определение. *Проварьировать функцию* $\psi(t)$ *означает включить ее в однопараметрическое семейство функций* $\tilde{\psi}(t,\alpha)$ *так, что* $\tilde{\psi}(t,0)=\psi(t)$,

$$\delta\psi(t)=\left.\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\delta\psi(t)=\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left.\frac{d\tilde{\psi}}{dt}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha=\delta\dot{\psi}(t).$$

При переходе от прямого пути к любому окольному действие получает приращение $W+\delta W=\int\limits_{t_o}^{t_1}Ldt+\int\limits_{t_o}^{t_1}\delta Ldt$. Вариация действия

$$\delta W=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{d}{dt}\delta q^i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1}-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\delta q^i dt=0$$

на прямом пути равна нулю, то есть прямой путь сообщает действию стационарное значение.

Принцип Гамильтона. *Действие по Гамильтону имеет стационарное значение на прямом пути, если к сравнению с ним привлекается многообразие окольных путей, совпадающих с прямым в начальный и конечный моменты времени* $\{q(t)-\text{прямой путь}\}\Longleftrightarrow\{\forall\,\delta q(t),\ \delta q(t_o)=\delta q(t_1)=0,\ \delta W=0\}$.

Утверждение $\Rightarrow$ следует из выражения вариации действия, а утверждение $\Leftarrow$ есть следствие независимости вариаций $\delta q^i,\quad i=\overline{1,n}$.

Вариационный принцип Гамильтона, отмечая стационарное свойство функционала, характеризует весь прямой путь в целом и выделяет его среди других кинематически возможных путей.

Принципу Гамильтона можно придать другую форму, введя в рассмотрение элементарное действие $L^*dt=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\dot{q}^i-H(t,q,p)\right]dt$, где $q^i,p_i,\quad i=\overline{1,n}$ и t параметры пространства размерности $(2n+1)$. В этом случае вариация действия дает уравнения Гамильтона

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L^*}{\partial q^i}\equiv\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}=0,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{p}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial p_i}\equiv-\dot{q}^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}=0.$$

В отличие от первой формы принципа любая точка фазового пространства определяет единственный прямой путь, поэтому начальная и конечная точки $B_o[t_o,q(t_o),p(t_o)]$ и $B_1[t_1,q(t_1),p(t_1)]$ выбираются не произвольно, а на каком-либо прямом пути.

Для обоснования принципа можно воспользоваться общим уравнением динамики $\sum\limits_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu-m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\delta\mathbf{r}_\nu=0$, где в силу определений виртуальное перемещение каждой точки тождественно вариации ее радиус-вектора и

$$\frac{d}{dt}\delta\,\mathbf{r}_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{r}}(t,\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=o}\delta\alpha = \frac{\partial\dot{\widetilde{\mathbf{r}}}(t,\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=o}\delta\alpha = \delta\,\dot{\mathbf{r}}_\nu\,.$$

Поэтому $\sum\limits_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\delta\mathbf{r}_\nu =$

$$= \delta A - \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu = \delta A - \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu + \delta T = 0$$

и, интегрируя это равенство по времени на интервале $[t_o, t_1]$, при условии $\delta\mathbf{r}_\nu(t_o) = \delta\mathbf{r}_\nu(t_1) = 0$ получаем $\int\limits_{t_0}^{t_1}(\delta A + \delta T)dt - \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu\,\delta\mathbf{r}_\nu\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$ или

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1}(\delta A + \delta T)dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i} + \frac{\partial T}{\partial q^i}\right)\delta q^i\,dt = 0\,.$$

По аналогии с принципом Гамильтона, для уравнений динамики в форме уравнений Якоби, вводится действие по Лагранжу $W^* = \int\limits_{q^1(t_o)}^{q^1(t_1)} P dq^1$, где $P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}$. Принцип наименьшего действия Мопертюи - Лагранжа среди всех кинематически возможных путей на многообразии, определяемом интегралом энергии, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу имеет стационарное значение. При таком изоэнергетическом варьировании время перехода системы из начального положения в конечное не обязательно одинаково для прямого и окольных путей.

Якоби рассмотрел вопрос о движении по инерции натуральной системы с кинетическим потенциалом $P = 2\sqrt{hG}$, $W^* = \int\limits_{q^1(t_o)}^{q^1(t_1)} 2\sqrt{h\sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}dq^i dq^j}$.

В такой постановке принцип наименьшего действия совпадает с задачей нахождения геодезических в пространстве с метрикой $ds^2 = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}dq^i dq^j$

$$S = \int_{q^1(t_o)}^{q^1(t_1)} dS = \int_{q^1(t_o)}^{q^1(t_1)}\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}dq^i dq^j = \sqrt{2h}(t_1 - t_o).$$

Характер экстремума действия по Гамильтону определяется знаком второй вариации действия $\delta^2 W$ на прямом пути.

$$\delta^2 L = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial^2(T - \Pi)}{\partial q^i\partial q^j}\delta q^i\delta q^j + \sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\delta\dot{q}^i\delta q^j + T(\delta\dot{q})$$

Полагая $\left|\delta\dot{q}^k\right| \le \beta^k$, получаем $\delta q^k = \int\limits_{t_o}^{t_1}\delta\dot{q}^k dt < \beta^k(t_1 - t_o)$ и

$$\delta^2 L < \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial^2(T-\Pi)}{\partial q^i \partial q^j}\beta^i\beta^j(t_1-t_o)^2+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q^i \partial q^j}\beta^i\beta^j(t_1-t_o)+T(\delta\dot q)>0.$$

При достаточно малом промежутке времени t_1-t_o слагаемое $T(\delta\dot q)$, как превалирующее в этом выражении определяет его знак $\delta^2 L\approx T(\delta\dot q)>0$.

Таким образом, на малом интервале действие по Гамильтону минимально по сравнению с действием на окольных путях. Характер экстремума может измениться, если между начальной и конечной точкой имеется кинетический фокус.

Определение. *Две точки $A_o[t_o,q(t_o)]$ и $A^*\left[t^*,q\left(t^*\right)\right]$ расширенного координатного пространства, расположенные на решении $q[t,t_o,q(t_o),\dot q(t_o)]$, называются сопряженными кинетическими фокусами, если через эти точки можно провести бесчисленное множество прямых путей :*

$$q\left[t^*,t_o,q(t_o),\dot q(t_o)\right]=q\left[t^*,t_o,q(t_o),\tilde{\dot q}(t_o)\right].$$

Для линейных систем эти равенства эквивалентны условию

$$\det\left(\frac{\partial q^i\left[t^*,t_o,q(t_o),\dot q(t_o)\right]}{\partial \dot q^j(t_o)}\right)=0.$$

По поводу кинетических фокусов Якоби отмечает, что в принципе наименьшего действия предполагаются заданными не начальные положения и скорости, а начальные и конечные положения системы. Поэтому для нахождения истинного движения надо решить уравнения, определяющие начальные скорости из конечных положений. Эти уравнения не всегда будут линейными, вследствие чего можно получить несколько наборов значений начальных скоростей, и им соответствует тогда несколько движений системы из заданных начальных положений в заданные конечные положения и на всех этих движениях вариация действия равна нулю.

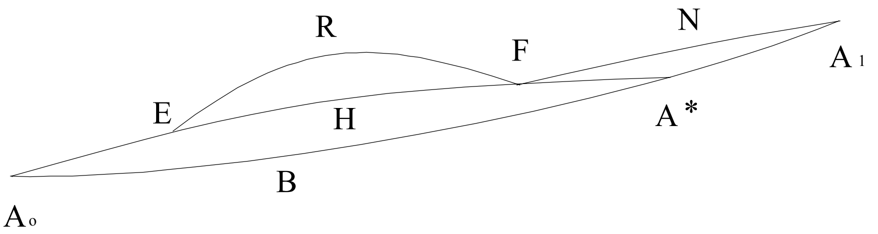
Теорема (необходимое условие минимума). *Если действие по Гамильтону при любом варьировании прямого пути с закрепленными граничными точками достигает минимума на прямом пути, то на рассматриваемом интервале отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке.*

Теорема (достаточное условие минимума). *Если на прямом пути отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке, то при любом нетривиальном варьировании с закрепленными граничными точками действие по Гамильтону принимает на прямом пути минимум.*

На прямом пути A_oBA_1 между точками $A_o[t_o,q(t_o)]$ и $A_1[t_1,q(t_1)]$ выберем точку $A^*[t^*,q(t^*)]$, для которой вторая вариация действия, вычисленная на окольном пути A_oHA^*, первый раз обращается в нуль. Для действия между точками $A_o[t_o,q(t_o)]$ и $A^*[t^*,q(t^*)]$ введем обозначение

$$W(\alpha)=W(0)+\left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha\delta\alpha+\ldots$$

Тогда $W_{A_oBA^*}=W(0)+\ldots$ и $W_{A_oHA^*}=W(0)+\left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha+\ldots$.



Покажем, что путь $A_o HA^*$ также прямой. Допустим обратное. На пути $A_o HA^*$ две близкие точки E и F соединим прямым путем ERF, тогда

$$W_{A_o ERFA^*} = W(0) + \left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=o} \delta\alpha + \left.\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=o} \delta\alpha\delta\alpha + \ldots <$$

$$< W(0) + \left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=o} \delta\alpha + \ldots = W_{A_o EHFA^*} = W_{A_o HA^*},$$

то есть $\left.\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=o} < 0$. Это противоречит условию, что точка A^* − первое положение на прямом пути, в котором вторая вариация действия обращается в нуль. Предположение ошибочно и путь $A_o HA^*$ − прямой. Также показано, что действие есть минимум, если конечное положение проходится системой ранее того момента, когда достигается сопряженный рассматриваемому начальному положению кинетический фокус. Окольные пути, на которых вторя вариация действия обращается в нуль, принадлежит к числу истинных, бесконечно близких к прямому пути.

Действие на прямом пути $A_o BA^* A_1$ уже не является минимумом. Это следует из возможности построения окольного пути, действие по которому будет меньше, чем на прямом. Для построения этого окольного пути соединим точки F и A_1 прямым путем, тогда $W_{FNA_1} < W_{FA^*A_1} = W_{FA^*} + W_{A^*A_1}$.

Поэтому $W_{ABA^*A_1} = W_{ABA^*} + W_{A^*A_1} = W_{AHF} + W_{FA^*} + W_{A^*A_1} > W_{AHF} + W_{FNA_1} = W_{A_o HFNA_1}$, то есть действие на прямом пути оказалось больше чем на построенном окольном. ***Теоремы доказаны.***

Проведенное геометрические рассмотрение позволило установить наличие минимума действия по Гамильтону на истинном пути, не проходящем через сопряженный кинетический фокус, и отсутствие минимума на пути, его содержащем. Однако оно не дает средств для разыскания фокуса и не решает вопроса о его существовании. Проблема открыта.

Пример. Сравнить действие по Гамильтону для одномерного осциллятора на прямом и окольном путях $\tilde{x} = x + \delta x$, где $\delta x = \alpha\, t(t_1 - t)$.

Подставляя $\tilde{x}$ в выражение действия $W = \int_o^{t_1} \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)dt$,

получаем $W(\tilde{x}) = W(x) + \int_o^{t_1} \left(\dot{x}\delta\dot{x} - \omega^2 x\delta x\right)dt + W(\delta x) =$

$$= W(x) + \dot{x}\delta x\Big|_o^{t_1} - \int_o^{t_1} \delta x(\ddot{x} + \omega^2 x)dt + W(\delta x).$$

Два средних слагаемых в этом выражении равны нулю, так как $\delta x(0) = \delta x(t_1) = 0$ и для прямого пути $x = x_o \cos\omega t + \dfrac{\dot{x}_o}{\omega}\sin\omega t$ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. В момент времени $T = \pi/\omega$ имеем кинетический фокус сопряженный исходной точке $x(T) = -x_o$.

Вычислим величину $W(\delta x) = \dfrac{\alpha^2}{2}\int_o^{t_1}\left[(t_1 - 2t)^2 - \omega^2(tt_1 - t^2)^2\right]dt =$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left[\left(t_1{}^2 t - 2t_1 t^2 + \frac{4}{3}t^3\right) - \omega^2\left(\frac{1}{3}t_1{}^2 t^2 - \frac{1}{2}t_1 t^4 + \frac{1}{5}t^5\right)\right]_o^{t_1} = \frac{\alpha^2}{6}t_1{}^3\left(1 - \frac{\omega^2 t_1{}^2}{10}\right).$$

Итак, имеем $W(\delta x) \geq 0,$ если $t_1 \leq \dfrac{\sqrt{10}}{\omega} \approx \dfrac{3.162}{\omega} > T$ и

$W(\delta x) < 0,$ если $t_1 > \dfrac{\sqrt{10}}{\omega} \approx \dfrac{3.162}{\omega} > T$.

Действие на окольном пути меньше чем действие на прямом пути, если конечная точка находится за кинетическим фокусом.

Эти вычисления иллюстрируют наличие проблемы, если конечная точка достаточно удалена от начальной точки.

Подсчитаем вторую вариацию действия между кинетическими фокусами на пути $\delta x = A\cos(\omega t + \alpha)$. $\delta^2 W = \int_o^T\left[(\delta\dot{x})^2 - \omega^2(\delta x)^2\right]dt =$

$$= -(A\omega)^2\int_o^T \cos(2\omega t + 2\alpha)dt = -\frac{1}{2}A^2\omega\sin(2\omega t + 2\alpha)\Big|_o^{\pi/\omega} = 0.$$