Лекция 2.6.
Натуральные и ненатуральные системы
Уравнения динамики

1. Для системы материальных точек со связями имеют место уравнения

$$m_k \mathbf{W}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{R}_k, \quad k = \overline{1, N}, \qquad (*)$$

где m_k – масса k – ой точки, W_k – ее ускорение, а $\mathbf{P}_k, \mathbf{R}_k$ – соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций связей, действующих на эту точку.

Время $t \equiv X^o \equiv Q^o$ будем считать декартовой координатой, а все координаты X^o, X^1, X^2, X^3 – функциями времени τ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_\alpha X^\alpha, \quad \mathbf{V} = \mathbf{i}_\alpha \frac{dX^\alpha}{d\tau}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{i}_\alpha \frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2}$$

$$\mathbf{i}_o^{\ 2} = -1, \quad \mathbf{i}_s^{\ 2} = 1, \quad \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_m = 0, \quad n \neq m.$$

Уравнения связей дополним уравнением $\dfrac{dX^o}{d\tau} = const$. Переход к обычному времени реализуется подстановкой $\tau = t - t_o$.

Уравнения (*) можно трактовать как уравнения динамики изображающей точки в $3N+1-$ мерном евклидовом пространстве. Эта точка называется *изображающей.*

Если вместо декартовых координат ввести криволинейные координаты $Q^i, \quad i = \overline{0,3N}$ с базисными векторами $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}(Q)}{\partial Q^i}$, то вектор скорости изображающей точки будет иметь точно такой же вид, как в криволинейной системе координат трехмерного евклидового пространства :

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \left(\mathbf{i}_o \frac{\partial X^o}{\partial Q^o}\frac{dQ^o}{d\tau} + \mathbf{i}_s \sum_{\alpha=o}^{3N} \frac{\partial X^s}{\partial Q^\alpha}\frac{dQ^\alpha}{d\tau} \right) = \mathbf{e}_i \dot{Q}^i,$$

$$V^2 = -\dot{Q}^o \dot{Q}^o + \sum_{\alpha\beta=o}^{3N} \frac{\partial X^s}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial X^s}{\partial Q^\beta} \dot{Q}^\alpha \dot{Q}^\beta.$$

Полагая, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий ее точек, получаем кинетическую энергию изображающей точки:

$$T = \frac{1}{2}\sum_\sigma m_\sigma V_\sigma^{\ 2} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=o}^{3N} A_{\alpha\beta} \dot{Q}^\alpha \dot{Q}^\beta = \frac{1}{2} V^2, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = A_{\alpha\beta},$$

где $$A_{oo} = -\sum_\sigma m_\sigma + \sum_\sigma m_\sigma \frac{\partial X_\sigma^s}{\partial Q^o}\frac{\partial X_\sigma^s}{\partial Q^o}, \quad A_{\alpha\beta} = \sum_\sigma m_\sigma \frac{\partial X_\sigma^s}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial X_\sigma^s}{\partial Q^\beta}.$$

Отметим, что независимо от параметризации кинетическая энергия представляет собой однородную квадратичную форму скоростей.

Переход к криволинейным координатам подразумевает подсчет обобщенных сил, коэффициентов перед скоростями $\dot{Q}^\alpha, \quad \alpha = \overline{0,3N}$ в выражении мощности:

$$N_P = \sum_\sigma \mathbf{P}_\sigma \cdot \mathbf{V}_\sigma = \sum_{\alpha=o}^{N}\sum_\sigma \mathbf{P}_\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial Q^\alpha} \dot{Q}^\alpha = \sum_{\alpha=o}^{N} F_\alpha \dot{Q}^\alpha,$$

где $$\mathbf{F}_\alpha = \sum_\sigma \mathbf{P}_\sigma \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial Q^\alpha}$$ – обобщенные силы.

Будем считать, что система подчинена линейным по скоростям связям

$$\sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \sum_{\alpha\beta=o}^{3N} l_\alpha^\mu \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \dot{Q}^\beta = \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mu = \overline{1,M},$$

где $\mathbf{e}^\alpha$ – базис взаимный исходному базису $\mathbf{e}_\beta$, то есть $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha$.

Если $\dfrac{\partial l_\alpha^\mu}{\partial Q^\beta} = \dfrac{\partial l_\beta^\mu}{\partial Q^\alpha}$, то существует функция $\varphi^\mu(Q)$, и имеем дело с голономной связью, в противном случае связь неголономная. Все связи кроме одной $\dot{Q}^o = 1$ стационарны по времени τ. Каждое уравнение связи в многообразии $Q^\alpha, \quad \alpha = \overline{0,3N}$ определяет поверхность с нормалью $\mathbf{L}^\mu = \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \mathbf{e}^\alpha$ и утверждает, что проекция скорости изображающей точки на эту нормаль равна нулю $\mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{V} = 0$.

Каждая связь порождает реакцию $\mathbf{R}^\mu = \lambda \mathbf{L}^\mu$, перпендикулярную поверхности, определяемой уравнением связи, что обеспечивает движение системы совместное со связями, то есть не выход изображающей точки из подмножества, определяемого пересечением уравнений связей, не влияя при этом на движение в самом подмножестве. Мощность каждой реакции связи равна нулю

$$N_R = \mathbf{R}^\mu \cdot \mathbf{V} = \lambda \mathbf{L}^\mu \cdot \mathbf{V} = \lambda \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = 0.$$

Введенные описанным способом реакции называются идеальными и позволяют считать систему как бы свободной, а скорости независимыми. Итак, мощность всех сил, включая реакции связей, имеет вид

$$N_{P+R} = \sum_{\alpha=o}^{3N} \left(F_\alpha + \sum_{\mu=1}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu \right) \dot{Q}^\alpha.$$

Приравнивая скорость изменения кинетической энергии мощности всех сил, получаем

$$\sum_{\alpha=o}^{3N} \dot{Q}^\alpha \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial Q^\alpha} - F_\alpha - \sum_{\mu=1}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu \right) = 0.$$

В силу произвольности скоростей имеем

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial Q^\alpha} = F_\alpha + \sum_{\mu=1}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu, \quad \alpha = \overline{0,3N},$$

$$\sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \delta_{o\mu}, \quad \mu = \overline{0,M}.$$

Это уравнения динамики системы материальных точек со связями в форме уравнений Лагранжа.

Если $\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial Q^\beta} = \dfrac{\partial F_\beta}{\partial Q^\alpha}$, то существует потенциал и $F_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial Q^\alpha}$. Помимо позиционных сил иногда имеют место гироскопические силы, описываемые обобщенным потенциалом

$$V = \sum_{\alpha=o}^{3N} V_\alpha(Q) \dot{Q}^\alpha,$$

$$\widetilde{F}_\alpha = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial V}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \frac{\partial V}{\partial Q^\alpha} = \sum_{\beta=o}^{3N} \gamma_{\alpha\beta}\dot{Q}^\beta, \quad \text{где} \quad \gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial Q^\beta} - \frac{\partial V_\beta}{\partial Q^\alpha}.$$

Введение кинетического потенциал $L = T - V - \Pi$ позволяет выразить уравнения динамики через одну функцию

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q^\alpha} = \sum_{\mu=1}^{M} \lambda_\mu l_\alpha^\mu, \quad \alpha = \overline{0,3N}, \quad \sum_{\alpha=o}^{3N} l_\alpha^\mu \dot{Q}^\alpha = \delta_{o\mu}, \quad \mu = \overline{0,M}.$$

Примером гироскопической силы может служить сила инерции Кориолиса, для которой существует обобщенный потенциал

$$V = m\mathbf{r}\cdot[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}_r] = m[\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}]\mathbf{V}_r \quad \to \quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial V}{\partial x^k} = -m2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}_r]_k.$$

Другим примером является сила Лоренца $\mathbf{F} = e\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right]$,

где напряженности электрического и магнитного полей выражаются через скалярный и векторный потенциалы $\mathbf{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = rot\mathbf{A}$.

Полагая $V = e\varphi - \frac{e}{c}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) = e\varphi - \frac{e}{c}\left(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right)$, получаем

$$\widetilde{F}_x = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial \tau} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right) -$$

$$-e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) = eE_x + \frac{e}{c}\left(\dot{y}H_z - \dot{z}H_y\right).$$

Классические системы, в которых силы имеют обычный или обобщенный потенциалы, называют натуральными. Для натуральных систем кинетический потенциал является квадратичной формой обобщенных скоростей.

2. Примером ненатуральной системы может служить релятивистская частица. Псевдоевклидова метрика $c^2 d\tau\, d\tau = c^2 dt\, dt - dx^i dx^i$ $\left(c^2 = 1/\varepsilon_o\mu_o\right.$, $\varepsilon_o, \mu_o -$ диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума) устанавливает связь между ходом часов в неподвижной и движущейся системах координат :

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}} = \gamma. \tag{2.1}$$

Строя релятивистскую механику, А.Пуанкаре ввел безразмерную 4-скорость

$$U^o = \gamma, \quad U^i = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau}, \quad U_o = \gamma, \quad U_i = -\frac{\gamma}{c}\frac{dx^i}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau}, \tag{2.2}$$

4-импульс

$$\begin{aligned} \pi^o &= m_o c U^o, \quad \pi^i = m_o c U^i = m_o\gamma\frac{dx^i}{dt} = m_o\frac{dx^i}{d\tau}, \\ \pi_o &= m_o c U_o, \quad \pi_i = m_o c U_i = -m_o\gamma\frac{dx^i}{dt} = -m_o\frac{dx^i}{d\tau} \end{aligned} \tag{2.3}$$

и записал уравнения динамики в виде

$$\frac{d\pi^{\nu}}{d\tau} = F^{\nu}, \quad \nu = 0,1,2,3 \qquad \text{или} \qquad \frac{d\pi^{i}}{dt} = \frac{F^{i}}{\gamma}, \quad i = 1,2,3 \tag{2.4}$$

Произвол в задании сил недопустим, так как $\pi^{o} = m_{o}c\gamma = m_{o}c\sqrt{1+\pi^{i}\pi^{i}/(m_{o}c)^{2}}$ система уравнений (2.4) должна иметь интеграл

$$\pi^{o}\pi^{o} - \pi^{i}\pi^{i} = (m_{o}c)^{2} = const \tag{2.5}$$

и переходить в уравнения И.Ньютона при $c \to \infty$.

4-силы А.Пуанкаре определил соотношениями

$$F^{o} = \frac{\gamma}{c} f^{i} \frac{dx^{i}}{dt} = f^{i}U^{i}, \quad F^{i} = \gamma f^{i} = f^{i}U^{o}\ , \tag{2.6}$$

где f^{i} – обычные трехмерные силы. Итак, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{dx^{o}}{d\tau} = \frac{1}{m_{o}}\pi^{o}, \quad x^{o} = ct, \quad &&\frac{d\pi^{o}}{d\tau} = \frac{1}{m_{o}c} f^{i}\pi^{i}, \\ &\frac{dx^{i}}{d\tau} = \frac{1}{m_{o}}\pi^{i}, &&\frac{d\pi^{i}}{d\tau} = \frac{1}{m_{o}c} f^{i}\pi \end{aligned} \tag{2.7}$$

либо
$$m_{o}\frac{d^{2}x^{o}}{d\tau^{2}} = \frac{1}{c} f^{i}\frac{dx^{i}}{d\tau}, \qquad m_{o}\frac{d^{2}x^{i}}{d\tau^{2}} = \frac{1}{c} f^{i}\frac{dx^{o}}{d\tau}. \tag{2.8}$$

Переход к координатному времени t согласно (2.1) дает

$$\frac{d}{dt}\left(m_{o}\frac{dx^{i}}{dt} \Bigg/ \sqrt{1 - \frac{1}{c^{2}}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{j}}{dt}} \right) = f^{i}. \tag{2.9}$$

Введение кинетического потенциала $F = -m_{o}c^{2}\sqrt{1 - \frac{1}{c^{2}}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{j}}{dt}}$ так, что $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{i}} = P^{i}$ $\left(\dot{x}^{i} = \frac{dx^{i}}{dt}\right)$ и функции $L = F - \Pi$, где $f^{i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x^{i}}$ позволяет рассматривать (2.9) как уравнения Лагранжа.

Для релятивистской частицы кинетический потенциал не совпадает с кинетической энергией. Уравнения (2.9) в проекциях на касательную и главную нормаль к траектории принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(m_{o}\gamma V_{//}\right) = m_{o}\gamma^{3}\frac{dV}{dt} = f_{//}, \qquad \frac{d}{dt}\left(m_{o}\gamma V_{\perp}\right) = m_{o}\gamma\frac{V^{2}}{\rho} = f_{\perp}, \tag{2.10}$$

и для подсчета кинетической энергии достаточно вычислить интеграл

$$T = \int f_{//}Vdt = \int m_{o}\gamma^{3}\frac{dV}{dt}Vdt = m_{o}c^{2}\int \gamma^{3}\frac{VdV}{c^{2}} = \frac{m_{o}c^{2}}{\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}.$$

Отметим, что системе (2.8) соответствует функция Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2}m_{o}\left(\frac{dx^{o}}{d\tau}\frac{dx^{o}}{d\tau} - \frac{dx^{i}}{d\tau}\frac{dx^{i}}{d\tau}\right) - \frac{1}{c}\frac{dx^{o}}{d\tau}\Pi(x^{i}). \tag{2.11}$$

При отсутствии силового поля значение функции Лагранжа (2.11) с точностью до множителя $-\frac{1}{2}$ совпадает с энергией покоя $L = -\frac{m_{o}}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{2} = -\frac{m_{o}c^{2}}{2}$. Чтобы это совпадение не нарушалось и при наличии силового поля, определим пространственно-временной интервал выражением

$$\left[c^2+\left(\frac{\Pi(x^i)}{m_o c}\right)^2\right]d\tau\, d\tau=\left(cdt+\frac{\Pi(x^i)}{m_o c}d\tau\right)^2-dx^i dx^i\,, \qquad (2.12)$$

из которого следует

$$L=-\frac{m_o c^2}{2}=-\frac{m_o}{2}\left[\left(\frac{dx^o}{d\tau}+\frac{\Pi(x^i)}{m_o c}\right)^2-\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}\right]+\frac{m_o}{2}\left(\frac{\Pi(x^i)}{m_o c}\right)^2,$$

что совпадает с (2.11).

Требование форм инвариантности позволяет записать (2.12) в виде

$\tilde{c}^{\,2}d\tau\, d\tau=c^2 d\tilde{t}\, d\tilde{t}-dx^i dx^i$, где $\tilde{c}=c\sqrt{1+\left(\dfrac{\Pi(x^i)}{m_o c^2}\right)^2}$ - скорость света в неподвижной системе отсчета при наличии силового поля и $d\tilde{t}=dt+\dfrac{\Pi(x^i)}{m_o c^2}d\tau$. Ход часов в неподвижной системе отсчета зависит от силового поля и $\tilde{c}\neq const$.

3. Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять вместо величин $\tau,Q,\dot{Q}$ величины τ,Q,P. $P-$обобщенные импульсы, определяемые равенствами

$$P_\alpha=\frac{\partial T}{\partial\dot{Q}^\alpha}=\sum_{\beta=o}^{N}A_{\alpha\beta}\dot{Q}^\beta \quad\to\quad \dot{Q}^\alpha=\sum_{\beta=o}^{N}A^{\alpha\beta}P_\beta=\frac{\partial\hat{T}}{\partial P_\alpha} \qquad \text{где}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=o}^{N}A_{\alpha\beta}\dot{Q}^\alpha\dot{Q}^\beta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{Q}^\alpha P_\alpha=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=o}^{N}A^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta=\hat{T} \quad \text{и} \quad A_{\alpha s}A^{s\beta}=\delta_\alpha^\beta\,.$$

Рассмотренный переход от скоростей к импульсам представляет собой частный случай дуального преобразования Лежандра с производящими функциями $T(Q,\dot{Q})$ или $\hat{T}(Q,P)$. В этом преобразовании координаты Q играют роль параметров, и в силу равенства $\dfrac{\partial A_{\alpha s}}{\partial Q}A^{s\beta}=-A_{\alpha s}\dfrac{\partial A^{s\beta}}{\partial Q}$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial Q}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha s=o}^{N}\frac{\partial A_{\alpha s}}{\partial Q}\dot{Q}^\alpha\dot{Q}^s=\frac{1}{2}\sum_{\alpha s\beta=o}^{N}\frac{\partial A_{\alpha s}}{\partial Q}\dot{Q}^\alpha A^{s\beta}P_\beta=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha s\beta=o}^{N}\frac{\partial A^{s\beta}}{\partial Q}A_{\alpha s}\dot{Q}^\alpha P_\beta=-\frac{1}{2}\sum_{s\beta=o}^{N}\frac{\partial A^{s\beta}}{\partial Q}P_s P_\beta=-\frac{\partial\hat{T}}{\partial Q}$$

Уравнения динамики в новых переменных получаем из теоремы об изменении кинетической энергии

$$\frac{d\hat{T}}{d\tau}=\sum_{\alpha=o}^{N}\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha+\frac{\partial\hat{T}}{\partial Q^\alpha}\right)=\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{Q}^\alpha\left(\dot{P}_\alpha+\frac{\partial\hat{T}}{\partial Q^\alpha}\right)=\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{Q}^\alpha\left(F_\alpha+\sum_{\mu=1}^{M}\lambda_\mu l_\alpha^\mu\right)=N$$

$$\dot{Q}^{\alpha} = \frac{\partial \widehat{T}}{\partial P_{\alpha}}, \quad \alpha = \overline{0,N}, \qquad \sum_{\alpha=o}^{3N} l_{\alpha}^{\mu} \dot{Q}^{\alpha} = \delta_{o\mu}, \quad \mu = \overline{0,M},$$

$$\dot{P}_{\alpha} = -\frac{\partial \widehat{T}}{\partial Q^{\alpha}} + F_{\alpha} + \sum_{\mu=o}^{M} \lambda_{\mu} l_{\alpha}^{\mu}.$$

Теорема Донкина *Преобразование* $y_i = \dfrac{\partial X(\alpha, x)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, *определяемое производящей функцией* $X(\alpha, x)$, *гессиан которой отличен от нуля* $\det\left(\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$, *имеет обратное преобразование* $x_i = \dfrac{\partial Y(\alpha, y)}{\partial y_i}$, $i = \overline{1,n}$, *определяемое производящей функцией* $Y(\alpha, y)$, *гессиан которой также отличен от нуля* $\det\left(\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y_i \partial y_j}\right) \neq 0$, $Y(\alpha, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha, y) \cdot y_i - X[\alpha, x(\alpha, y)]$,

$X(\alpha, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y(\alpha, x)_i - Y[\alpha, y(\alpha, x)]$ *и* $\dfrac{\partial X}{\partial \alpha} = -\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha}$.

Прямые вычисления дают

$$\frac{\partial Y}{\partial y_j} = x_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} y_i - \frac{\partial X}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}.$$

Поскольку суммы в этих выражениях сокращаются, имеем требуемые равенства. ***Теорема доказана.***

Применим теорему Донкина к переходу от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона в системе без связей . Будем считать, что силы определяются обобщенным потенциалом. Тогда исходной производящей функцией будет функция Лагранжа $L = T_2 - V_1 - \varPi_o$. Индексом отмечен показатель степени обобщенной скорости. Производящую функцию обратного преобразования обозначим символом

$$H = \sum_{i=o}^{n} p_i \widehat{\dot{q}}^i - \widehat{L} = \sum_{i=o}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - \widehat{L} = 2\widehat{T}_2 - \widehat{V}_1 - \widehat{T}_2 + \widehat{V}_1 + \varPi_o = \widehat{T}_2 + \varPi_o .$$

По теореме Донкина $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$, $i = \overline{1,n}$, если время включено в перечень координат, то для индекса $i = o$ имеем

$$\dot{q}^o = \frac{\partial H}{\partial p_o} = const, \quad \dot{p}_o = -\frac{\partial H}{\partial q^o} + \lambda_o$$

первое уравнение определяет импульс p_o, а второе − неопределенный множитель λ_o.

Раус предложил взять в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, часть переменных Лагранжа и часть переменных Гамильтона:

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\beta}, \quad \beta = \overline{m+1, n} \quad \to \quad R = \sum_{\beta=m+1}^{n} p_\beta \hat{\dot q}^\beta - \hat L,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial R}{\partial q^\alpha} = -\lambda_o \delta_{\alpha o}, \quad \alpha = \overline{o, m},$$

$$\dot q^\beta = \frac{\partial R}{\partial p_\beta}, \quad \dot p_\beta = -\frac{\partial R}{\partial q^\beta}, \quad \beta = \overline{m+1, n}.$$

Такая форма записи уравнений динамики особенно целесообразна, если координаты $q^\beta, \ \beta = \overline{m+1, n}$ являются циклическими, то есть не входят в функцию Лагранжа и следовательно в функцию Рауса. Импульсы, соответствующие циклическим координатам, сохраняются $p_\beta = C_\beta$, а сами координаты после интегрирования первых m уравнений определяются квадратурами $q^\beta = \int_o^t \frac{\partial R}{\partial C_\beta} dt + C'_\beta$. Наличие $n-m$ циклических координат понижает порядок системы на $2(n-m)$ единиц.

Отметим также возможность трактовать вторую группу уравнений Гамильтона $\dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \ \alpha = \overline{1, m}$ как преобразование Лежандра, реализующее переход от переменных q^α к переменным $\dot p_\alpha$. Обратное преобразование имеет вид $q^\alpha = -\frac{\partial M}{\partial \dot p_\alpha}$, где $M(p, \dot p) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \dot p_\alpha \hat q^\alpha - H(p, \hat q)$. Переменные p_α в этом преобразовании играют роль параметров, и первая группа уравнений Гамильтона принимает вид $\dot q^\alpha = -\frac{\partial M}{\partial p_\alpha}$. Итак, в переменных $p, \dot p$ имеем уравнения $\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot p_\alpha} - \frac{\partial M}{\partial p_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}$.

Независимость скоростей позволила ввести взаимные скорости-импульсы и записать уравнения динамики в виде уравнений Гамильтона. Критерием независимости скоростей является условие $\det \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta} = \det a_{\alpha\beta} \neq 0$

Ситуация $\det a_{\alpha\beta} = 0$ возникает в тех случаях, когда вводятся независимые координаты или скорости в избыточном количестве. Проиллюстрируем это примерами.

Пример. Материальная точка движется в плоскости по кривой

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 = 1.$$

Введение параметров q_1, q_2 равенствами

$$x = x_o + \frac{aq_1}{\sqrt{q_1^{\ 2} \pm q_2^{\ 2}}}, \quad y = y_o + \frac{bq_2}{\sqrt{q_1^{\ 2} \pm q_2^{\ 2}}}$$

Обращает это уравнение в тождество. Параметры q_1, q_2 произвольны. Опуская очевидные вычисления, для кинетической энергии получаем выражение

$$2T = m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = m\frac{a^2 q_2^{\ 2} + b^2 q_1^{\ 2}}{\left(q_1^{\ 2} \pm q_2^{\ 2}\right)^3}\left(\dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1\right)^2 .$$

Пример. Компонента скорости конька, перпендикулярная его лезвию равна нулю: $\dot{y}\cos\alpha - \dot{x}\sin\alpha = 0$. Введение скоростей

$$\dot{x} = 2\dot{q}_1 + \frac{1}{\sin\alpha}\left(\dot{q}_2\cos\alpha - \dot{q}_1\sin\alpha\right), \quad \dot{y} = 2\dot{q}_2 - \frac{1}{\cos\alpha}\left(\dot{q}_2\cos\alpha - \dot{q}_1\sin\alpha\right),$$

обращает уравнение связей в тождество. Скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ независимы.
Для кинетической энергии получаем выражение

$$2T = J\dot{\alpha}^2 + m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = J\dot{\alpha}^2 + m\left(\frac{\dot{q}_2}{\sin\alpha} + \frac{\dot{q}_1}{\cos\alpha}\right)^2 .$$

В обоих случаях $\det\dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}^\alpha \partial\dot{q}^\beta} = 0$. Устранение возникшей неопределенности состоит в корректном определении кинетической энергии.

Пример. Составить уравнения динамики твердого тела с неподвижной точкой, определяя его положение четырьмя координатами $q_i, \quad i = \overline{o,3}$, связанными с параметрами Эйлера - Родрига - Гамильтона соотношениями $\lambda_i = q_i \Big/ \sqrt{\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2}}$.

Матрица поворота при такой параметризации удовлетворяет всем требованиям ортогональности, нормировки $S_{i\alpha}S_{j\alpha} = \delta_{ij}, \quad S_{\alpha i}S_{\alpha j} = \delta_{ij}$ и каждый элемент равен своему дополнению. Все координаты независимы и область их изменения $(-\infty, +\infty)$. В явном виде имеем

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} - q_2^{\ 2} - q_3^{\ 2}}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & 2\dfrac{q_1 q_2 + q_o q_3}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & 2\dfrac{q_1 q_3 - q_o q_2}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} \\ 2\dfrac{q_2 q_1 - q_o q_3}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & \dfrac{q_o^{\ 2} - q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} - q_3^{\ 2}}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & 2\dfrac{q_2 q_3 + q_o q_1}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} \\ 2\dfrac{q_3 q_1 + q_o q_2}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & 2\dfrac{q_3 q_2 - q_o q_1}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} & \dfrac{q_o^{\ 2} - q_1^{\ 2} - q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}}{q_o^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} \end{pmatrix}$$

Вычислим угловые скорости

$$\omega_1 = S_{3\alpha}\dot{S}_{2\alpha} = 2\left(-\lambda_1\dot{\lambda}_o + \lambda_o\dot{\lambda}_1 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3\right) =$$

$$= 2\left(-q_1\dot{q}_o + q_o\dot{q}_1 + q_3\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3\right) \Big/ \sum_{s=0}^{3} q_s^{\ 2},$$

$$\omega_2 = S_{1\alpha}\dot{S}_{3\alpha} = 2\left(-\lambda_2\dot{\lambda}_o + \lambda_o\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1\right) =$$
$$= 2\left(-q_2\dot{q}_o + q_o\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_1\right)\Big/\sum_{s=0}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$\omega_3 = S_{2\alpha}\dot{S}_{1\alpha} = 2\left(-\lambda_3\dot{\lambda}_o + \lambda_o\dot{\lambda}_3 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2\right) =$$
$$= 2\left(-q_3\dot{q}_o + q_o\dot{q}_3 + q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_3\right)\Big/\sum_{s=0}^{3} q_s^{\ 2},$$

Введем скорость $\omega_o = 2\left(-q_o\dot{q}_o - q_1\dot{q}_1 - q_2\dot{q}_2 - q_3\dot{q}_3\right)\Big/\sum_{s=0}^{3} q_s^{\ 2}$

и запишем кинетическую энергию тела в главных осях его тензора инерции

$$2T = D\omega_o^{\ 2} + A\omega_1^{\ 2} + B\omega_2^{\ 2} + C\omega_3^{\ 2},$$

где $D-$произвольная константа отличная от нуля. Введение квазискорости ω_o обеспечивает приведение уравнений Лагранжа к виду уравнений Коши и разрешимость уравнений $p_s = \partial T\big/\partial\dot{q}^s, \quad s = \overline{o,3}$ относительно скоростей $\dot{q}_i, \quad i = \overline{o,3}$:

$$p_o = 2\left(-D\omega_o q_o - A\omega_1 q_1 - B\omega_2 q_2 - C\omega_3 q_3\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$p_1 = 2\left(-D\omega_o q_1 + A\omega_1 q_o - B\omega_2 q_3 + C\omega_3 q_2\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$p_2 = 2\left(-D\omega_o q_2 + A\omega_1 q_3 + B\omega_2 q_o - C\omega_3 q_1\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$p_3 = 2\left(-D\omega_o q_3 - A\omega_1 q_2 + B\omega_2 q_1 + C\omega_3 q_o\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$

Эти уравнения легко разрешаются относительно угловых скоростей

$$\widehat{\omega}_o = \left(-p_o q_o - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3\right)/2D,$$
$$\widehat{\omega}_1 = \left(-p_o q_1 + p_1 q_o + p_2 q_3 - p_3 q_2\right)/2A,$$
$$\widehat{\omega}_2 = \left(-p_o q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_o + p_3 q_1\right)/2B,$$
$$\widehat{\omega}_3 = \left(-p_o q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_o\right)/2C,$$

Итак, $2\widehat{T} = D\widehat{\omega}_o^{\ 2} + A\widehat{\omega}_1^{\ 2} + B\widehat{\omega}_2^{\ 2} + C\widehat{\omega}_3^{\ 2}$. Коэффициенты перед скоростями $\dot{q}_i, \quad i = \overline{o,3}$ в выражении мощности сил, действующих на тело, представляют собой обобщенные силы $N = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} M_i\omega_i = \sum_{s=o}^{3} Q_s\dot{q}^s$

$$Q_o = 2\left(-M_1 q_1 - M_2 q_2 - M_3 q_3\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$Q_1 = 2\left(\quad M_1 q_o - M_2 q_3 + M_3 q_2\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$
$$Q_2 = 2\left(\quad M_1 q_3 + M_2 q_o - M_3 q_1\right)\Big/\sum_{s=o}^{3} q_s^{\ 2},$$

$$Q_3 = 2\left(-M_1 q_2 + M_2 q_1 + M_3 q_o\right) \Big/ \sum_{s=o}^{3} q_s{}^2 .$$

Уравнения динамики могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа

$$\varepsilon_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0 .$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости равенств

$$\frac{1}{2}\left(\ q_o\varepsilon_1 + q_3\varepsilon_2 - q_2\varepsilon_3 - q_1\varepsilon_o\right) = A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 - M_1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(-q_3\varepsilon_1 + q_o\varepsilon_2 + q_1\varepsilon_3 - q_2\varepsilon_o\right) = B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\omega_1 - M_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\ q_2\varepsilon_1 - q_1\varepsilon_2 + q_o\varepsilon_3 - q_3\varepsilon_o\right) = C\dot{\omega}_1 + (B-A)\omega_1\omega_3 - M_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s=o}^{3} q_s\varepsilon_s = D\dot{\omega}_o = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\omega_o = const$. Выражение для ω_o является полным дифференциалом, и если значение константы равно нулю, то $\sum_{s=o}^{3} q_2{}^2 = const.$ Координаты $q_i, \quad i = \overline{o,3}$ будут совпадать с параметрами Эйлера – Родрига – Гамильтона, если значение этой второй константы равно единице. Таким образом, формально введенное в выражение кинетической энергии слагаемое $\frac{1}{2}D\omega_o{}^2$ равно нулю.

Уравнения динамики в форме уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_s = \frac{\partial \widehat{T}}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \widehat{T}}{\partial q_s} + Q_s, \quad s = \overline{o,3}$$

имеют интегралы

$$\sum_{s=o}^{3} p_s q_s = -2D\widehat{\omega}_o = -2D\omega_o = const = 0, \quad \sum_{s=o}^{3} q_s{}^2 = const = 1.$$

Действительно $\quad \frac{d}{dt}\sum_{s=o}^{3} q_s{}^2 = 2\sum_{s=o}^{3} q_s \frac{\partial \widehat{T}}{\partial p_s} = -2D\widehat{\omega}_o \sum_{s=o}^{3} q_s{}^2 = 0,$

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=o}^{3} p_s q_s = \sum_{s=o}^{3}\left(-\frac{\partial \widehat{T}}{\partial q_s} q_s + Q_s q_s + p_s \frac{\partial \widehat{T}}{\partial p_s}\right) = -2\widehat{T} + \sum_{s=o}^{3} Q_s q_s + 2\widehat{T} = 0.$$

Итак, в уравнениях слагаемые, содержащие множитель $\widehat{\omega}_o$ могут быть опущены и сумма $\sum_{s=o}^{3} q_2{}^2$ принята равной единице.