Лекция 2.9.
Критерии и свойства канонических преобразований

1. Для интегрируемости уравнений динамики большое значение имеет выбор координат, определяющих состояние системы.

В качестве обобщенных координат могут быть выбраны любые величины, однозначно определяющие положение системы. Оператор Лагранжа не зависит от этого выбора. При введении новых координат допустима зависимость от времени $Q^s = Q^s(\tau, q), \quad \dot{Q}^s = \sum_i \frac{\partial Q^s}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial Q^s}{\partial \tau}, \quad s = \overline{O, N}$. Такие преобразования называют точечными:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_s \frac{\partial L}{\partial Q^s}\frac{\partial Q^s}{\partial q^i} + \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\left[\sum_j \frac{\partial^2 Q^s}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 Q^s}{\partial q^i \partial \tau}\right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\frac{\partial \dot{Q}^s}{\partial \dot{q}^i} = \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\frac{\partial Q^s}{\partial q^i},$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_s \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\right)\frac{\partial Q^s}{\partial q^i} + \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\left[\sum_j \frac{\partial^2 Q^s}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 Q^s}{\partial \tau \partial q^i}\right] -$$

$$-\sum_s \frac{\partial L}{\partial Q^s}\frac{\partial Q^s}{\partial q^i} + \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\left[\sum_j \frac{\partial^2 Q^s}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 Q^s}{\partial q^i \partial \tau}\right] = \sum_s \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q^s}\right]\frac{\partial Q^s}{\partial q^i}.$$

Итак,
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^s}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q^s} = 0 \quad \to \quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

При точечных преобразованиях наряду с сохранением оператора Лагранжа не изменяет свою форму и оператор Гамильтона. Однако оператор Гамильтона допускает более широкий класс преобразований. Это связано с тем, что в методе Гамильтона в качестве переменных наряду с координатами выступают и импульсы. Понятие преобразование расширяется и включает в себя преобразование всех $2(N+1)$ переменных $Q^s = Q^s(\tau, q, p), \quad P_s = P_s(\tau, q, p), \quad s = \overline{O, N}$. Однако эти преобразования не произвольны. Ограничение состоит в том, что алгоритм составления уравнений динамики любой системы должен сохранить свою гамильтонову форму. Такие преобразования называют каноническими.

Важность изучения канонических преобразований связана с тем, что эти преобразования дают возможность заменить исходную гамильтонову систему другой гамильтоновой системой, в которой функция Гамильтона имеет более простую структуру, чем исходная.

Определение. *Неособенное преобразование переменных* $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(t, q, p)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}$ *называется каноническим, если оно переводит любую гамильтонову систему снова в гамильтонову систему* $H \Longleftrightarrow \tilde{H}$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования* $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(t, q, p), \ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}$ *является существование производящей функции* F *и некоторой постоянной* $c \neq 0$, *при которых имеет место тождество* $\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}^i - \tilde{H}\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i - H\delta t\right) - \delta F$.

В расширенных фазовых пространствах (t,q,p) и $(t,\tilde{q},\tilde{p})$, переходящих одно в другое при рассматриваемом преобразовании, возьмем два “плоских” замкнутых контура C_o и $\tilde{C}_o$, также переходящих один в другой. Построим трубки прямых путей для этих контуров. Итак,

$$\oint_{\tilde{C}}\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}^i-\tilde{H}\delta t\right)=\oint_{\tilde{C}_o}\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}^i\ ,$$

$$\oint_{C}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)=\oint_{C_o}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q^i\ .$$

В первых инвариантах перейдем от переменных $(t,\tilde{q},\tilde{p})$ к переменным (t,q,p):

$$\oint_{\tilde{C}_o}\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}^i=\oint_{C_o}\sum_{ij=1}^{n}\tilde{p}_i\left(\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial q^j}\delta q^j+\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial p_j}\delta p_j\right)=\oint_{C_o}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\delta q^j+B_j\delta p_j\right)=c\oint_{C_o}\sum_{j=1}^{n}p_j\delta q^j$$

По теореме Ли Хуа-чжуна универсальные интегральные инварианты могут отличаться только постоянным множителем. Таким образом,

$$\oint_{C}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}^i-\tilde{H}\delta t-c\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)\right]=0=\oint_{C}-\delta F$$

и так как контур произвольный, подынтегральное выражение есть полный дифференциал.

Согласно обратной теореме достаточность следует из равенства

$$\oint_{\tilde{C}}\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}^i-\tilde{H}\delta t\right)=c\oint_{C}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)=const\,.$$ ***Теорема доказана.***

2. Подойдем к критерию с других позиций. Отметим, что функция Лагранжа может быть определена с точностью до постоянного множителя и аддитивной полной производной по времени какой-либо функции координат и времени $\tilde{L}(\tau,Q,\dot{Q})=cL(\tau,Q,\dot{Q})+\frac{d}{d\tau}F(\tau,Q)$, в чем можно убедиться прямыми вычислениями :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}^i}=\frac{d}{d\tau}\left[c\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}^i}+\frac{\partial}{\partial\dot{Q}^i}\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q^j}\dot{Q}^j\right)\right]=c\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}^i}+\frac{\partial^2F}{\partial\tau\partial Q^i}+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q^j\partial Q^i}\dot{Q}^j\ ,$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial Q^i}=c\frac{\partial L}{\partial Q^i}+\frac{\partial}{\partial Q^i}\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q^j}\dot{Q}^j\right)=c\frac{\partial L}{\partial Q^i}+\frac{\partial^2F}{\partial Q^i\partial\tau}+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q^i\partial Q^j}\dot{Q}^j$$ и

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}^i}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial Q^i}=c\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}^i}-\frac{\partial L}{\partial Q^i}\right)=0\,.$$

2.1. Пусть некоторая динамическая система описывается двумя наборами гамильтоновых переменных $\tau,\tilde{Q},\tilde{P}$ и τ,Q,P. Соответствующие этим описаниям функции Лагранжа в $\tau,\tilde{Q},\dot{\tilde{Q}}$ и $\tau,Q,\dot{Q}$ переменных

$$\tilde{L}(\tau,\tilde{Q},\dot{\tilde{Q}})=\sum_{i=o}^{N}\tilde{P}_i\dot{\tilde{Q}}^i-\tilde{H}(\tau,\tilde{Q},\tilde{P}),\qquad cL(\tau,Q,\dot{Q})=c\left[\sum_{i=o}^{N}P_i\dot{Q}^i-H(\tau,Q,P)\right]$$

могут отличаться друг от друга на полную производную по времени некоторой функции координат и времени :

$$\left[\sum_{i=o}^{N}\tilde{P}_i\dot{\tilde{Q}}^i-\tilde{H}(\tau,\tilde{Q},\tilde{P})\right]-c\left[\sum_{i=o}^{N}P_i\dot{Q}^i-H(\tau,Q,P)\right]=-\frac{dF(\tau,Q,\tilde{Q})}{d\tau}.\qquad(*)$$

Пусть преобразование задано равенствами $\tilde{Q}^i=\tilde{Q}^i(\tau,Q,P),\quad \tilde{P}_i=\tilde{P}_i(\tau,Q,P),$

тогда
$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{Q}^i = \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \sum_{\alpha=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha,$$
$$\frac{d}{d\tau}F = \frac{\partial F}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=o}^{N} \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \sum_{\alpha=o}^{N} \frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha.$$

Подставим эти производные в равенство (*) и приравняем коэффициенты перед скоростями $\dot{Q}^\alpha, \dot{P}_\alpha$
$$\sum_{i=o}^{N} \widetilde{P}_i \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha} - cP_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}, \quad \sum_{i=o}^{N} \widetilde{P}_i \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial P_\alpha}.$$

Равенство свободных членов дает еще одно соотношение
$$\widetilde{H} = \sum_{i=o}^{N} \widetilde{P}_i \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial \tau} + cH + \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$

Существование производящей функции $F\left[\tau, Q, \widetilde{Q}(\tau, Q, P)\right] = F(\tau, Q, P)$ и отличной от нуля валентности c обеспечивается равенствами
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta} = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\beta}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha} = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\beta},$$
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial Q^\alpha \partial P_\beta} = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\beta}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha} - c\delta^\alpha_\beta = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\beta},$$
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial P_\alpha \partial P_\beta} = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\beta}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\alpha} = \sum_{i=o}^{N} \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\alpha}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\beta}.$$

Из этих сумм составляют разности, называемые скобками Лагранжа
$$\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\beta} - \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\beta}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\right) = \left[Q^\alpha Q^\beta\right] = 0,$$
$$\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\beta} - \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\beta}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\right) = \left[Q^\alpha P_\beta\right] = c\delta^\alpha_\beta,$$
$$\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\alpha}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\beta} - \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial P_\beta}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\alpha}\right) = \left[P_\alpha P_\beta\right] = 0.$$

При $c = 1$ каноническое преобразование называется унивалентным.

2.2. Двум наборам гамильтоновых переменных $\tau, \widetilde{Q}, \widetilde{P}$ и τ, Q, P, описывающих динамическую систему, можно также сопоставить функции Лагранжа соответственно в $\tau, P, \dot{P}$ и $\tau, \widetilde{P}, \dot{\widetilde{P}}$ описаниях $\widetilde{M}\left(\tau, \widetilde{P}, \dot{\widetilde{P}}\right) = -\sum_{i=o}^{N} \dot{\widetilde{P}}_i \widetilde{Q}^i - \widetilde{H}\left(\tau, \widetilde{Q}, \widetilde{P}\right)$ и $cM\left(\tau, P, \dot{P}\right) = c\left[-\sum_{i=o}^{N} \dot{P}_i Q^i - H(\tau, Q, P)\right]$, которые могут отличаться на полную производную по времени некоторой функции импульсов и времени .
$$\left[-\sum_{i=o}^{N} \dot{\widetilde{P}}_i \widetilde{Q}^i - \widetilde{H}\left(\tau, \widetilde{Q}, \widetilde{P}\right)\right] - c\left[-\sum_{i=o}^{N} \dot{P}_i Q^i - H(\tau, Q, P)\right] = -\frac{d}{d\tau}F\left(\tau, P, \widetilde{P}\right) \qquad (**)$$

Подстановка в это равенство выражений для производных

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{P}_i = \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha,$$

$$\frac{d}{d\tau}F = \frac{\partial F}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha$$

дает систему уравнений (коэффициенты перед скоростями $\dot{Q}^\alpha, \dot{P}_\alpha$)

$$\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\widetilde{Q}^i = \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}, \quad \sum_{i=o}^{N}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial P_\alpha}\widetilde{Q}^i - cQ^\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha},$$

$$\widetilde{H} = -\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial \tau}\widetilde{Q}^i + cH + \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$

Существование производящей функции обеспечивается выполнением равенств

$$\left[Q^\alpha Q^\beta\right] = 0, \quad \left[Q^\alpha P_\beta\right] = c\delta^\alpha_\beta, \quad \left[P_\alpha P_\beta\right] = 0.$$

2.3. Критерием каноничности преобразования $\widetilde{Q}(\tau, Q, P), \widetilde{P}(\tau, Q, P)$ можно считать выполнение условия $M^T JM = cJ$, где $M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) \end{pmatrix}$ – матрица Якоби, $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица порядка $N+1$.

Проведем вычисления

$$M^T JM = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T & -\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T & -\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) \end{pmatrix}$$

Четыре блока этой матрицы представляют собой скобки Лагранжа, например,

$$\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) \to \sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\beta} - \frac{\partial \widetilde{Q}^i}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial Q^\beta}\right) = \left[Q^\alpha Q^\beta\right]$$

и поскольку преобразование каноническое имеем $M^T JM = cJ$.

Матрицы, удовлетворяющие этому свойству, называют обобщенно–симплектическими, а в случае унивалентного преобразования – симплектическими. Условие обобщенной симплектичности матрицы Якоби можно рассматривать как критерий каноничности преобразования. Все обобщенно-симплектические матрицы образуют группу и $\det M = \pm c^n$.

Для того чтобы некоторое преобразование $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(\tau, Q, P)$, $\quad \widetilde{P} = \widetilde{P}(\tau, Q, P)$ *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая этому преобразованию матрица Якоби была обобщенно-симплектической с постоянной валентностью* c. *Условие симплектичности должно выполняться тождественно относительно всех переменных* $Q^i, P_i, \quad i = \overline{0, N}$.

2.4. Отметим, что $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = -E = -J \cdot J^{-1}$, то есть $J^{-1} = -J$, и запишем условие каноничности преобразования $M^T JM = cJ$ в измененной форме. Умножая обе части этого равенства слева на $\left(M^T\right)^{-1}$, а справа на M^{-1}, получаем $\frac{1}{c} J = \left(M^T\right)^{-1} JM^{-1} = -\left(M^T\right)^{-1} J^{-1} M^{-1} = -\left(MJM^T\right)^{-1}$ или

$\frac{1}{c} J^{-1} = \left(MJM^T\right)^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c} J = MJM^T.$ Проведем вычисления

$$MJ = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right) & -\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right) \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right) & -\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right) \end{pmatrix},$$

$$MJM^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T & \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T - \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T & \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)^T - \left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P}\right)^T \end{pmatrix}.$$

Четыре блока этой матрицы есть множество скобок Пуассона, например,

$$\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)^T - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial P}\right)^T \rightarrow \sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}^\beta}{\partial P_i}\frac{\partial \widetilde{Q}^\alpha}{\partial Q^i} - \frac{\partial \widetilde{Q}^\beta}{\partial Q^i}\frac{\partial \widetilde{Q}^\alpha}{\partial P_i}\right) = \left(\widetilde{Q}^\alpha \widetilde{Q}^\beta\right)$$

и *условия каноничности преобразования могут быть записаны с помощью скобок Пуассона в виде* $\left(\widetilde{Q}^\alpha \widetilde{Q}^\beta\right) = 0, \quad \left(\widetilde{Q}^\alpha \widetilde{P}_\beta\right) = \frac{1}{c}\delta^\alpha_\beta, \quad \left(\widetilde{P}_\alpha \widetilde{P}_\beta\right) = 0$.

Важным фактом является инвариантность скобок Пуассона относительно унивалентных канонических преобразований $\left(\varphi\left(\widetilde{Q}, \widetilde{P}\right)\psi\left(\widetilde{Q}, \widetilde{P}\right)\right) = c\left(\varphi(Q, P)\psi(Q, P)\right)$.

$$\left(\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}\right) = \sum_{\alpha=o}^{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{P}_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=o}^{N}\left(\sum_{ij=o}^{N}\frac{\partial \varphi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{P}_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{ij=o}^{N}\frac{\partial \varphi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\frac{\partial \psi}{\partial\left(Q^i P_j\right)}\sum_{\alpha=o}^{N}\left(\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{P}_\alpha} - \frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial\left(Q^i P_j\right)}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\right)$$

В этом выражении сокращаются все произведения в скобках кроме

$$\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial \widetilde{P}_\alpha}-\frac{\partial Q^i}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\right)=1,\quad \sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}-\frac{\partial Q^i}{\partial \widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial \widetilde{P}_\alpha}\right)=-1$$

поэтому $$(\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi})=\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Q^i}\frac{\partial\psi}{\partial P_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial P_i}\frac{\partial\psi}{\partial Q^i}\right)=(\varphi\psi).$$

2.5. Преобразование может быть задано равенствами $Q^i=Q^i\left(\tau,\widetilde{Q},\widetilde{P}\right),\quad P_i=P_i\left(\tau,\widetilde{Q},\widetilde{P}\right),$ тогда

$$\frac{d}{d\tau}Q^i=\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\dot{\widetilde{Q}}^\alpha+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\alpha}\dot{\widetilde{P}}_\alpha,$$

$$\frac{d}{d\tau}F=\frac{\partial F}{\partial\tau}+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\dot{\widetilde{Q}}^\alpha+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial F}{\partial\widetilde{P}_\alpha}\dot{\widetilde{P}}_\alpha.$$

Подставим эти производные в равенство (*) и приравняем коэффициенты перед скоростями $\dot{\widetilde{Q}}^\alpha,\dot{\widetilde{P}}_\alpha$ $$-c\sum_{i=o}^{N}P_i\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}+\widetilde{P}_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial\widetilde{Q}^\alpha},\quad c\sum_{i=o}^{N}P_i\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\alpha}=\frac{\partial F}{\partial\widetilde{P}_\alpha}.$$

Равенство свободных членов дает еще одно соотношение

$$\widetilde{H}=-c\sum_{i=o}^{N}P_i\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}+cH+\frac{\partial F}{\partial\tau}.$$

Существование производящей функции $F\left[\tau,\widetilde{Q},Q\left(\tau,\widetilde{Q},\widetilde{P}\right)\right]$ и отличной от нуля валентности c обеспечивается равенствами

$$\frac{\partial^2F}{\partial\widetilde{Q}^\beta\partial\widetilde{Q}^\alpha}=\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{Q}^\beta}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}=\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\beta},$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\widetilde{Q}^\alpha\partial\widetilde{P}_\beta}=c\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\beta}=c\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{P}_\beta}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}-\delta^\alpha_\beta,$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\widetilde{P}_\alpha\partial\widetilde{P}_\beta}=\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{P}_\alpha}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\beta}=\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{P}_\beta}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\alpha},$$

которые эквивалентны скобкам Лагранжа $$\left[\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{Q}^\beta\right]=0,\quad\left[\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{P}_\beta\right]=\frac{1}{c}\delta^\alpha_\beta,\quad\left[\widetilde{P}_\alpha\widetilde{P}_\beta\right]=0.$$

2.6. Полезно рассмотреть переход к новым гамильтоновым переменным непосредственно в уравнениях Гамильтона

$$\frac{dQ^i}{d\tau}=\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\dot{\widetilde{Q}}^\alpha+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\alpha}\dot{\widetilde{P}}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_i},$$

$$\frac{dP_i}{d\tau}=\frac{\partial P_i}{\partial\tau}+\sum_{\alpha=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{Q}^\alpha}\dot{\widetilde{Q}}^\alpha+\sum_{j=o}^{N}\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{P}_\alpha}\dot{\widetilde{P}}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial Q^i}.$$

После умножений этих уравнений соответственно на $\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{P}_\beta}\left(\frac{\partial P_i}{\partial\widetilde{Q}^\beta}\right)$ $,-\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{P}_\beta}\left(-\frac{\partial Q^i}{\partial\widetilde{Q}^\beta}\right)$ и суммирования по индексу i получим

$$\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{\tilde{Q}}^{\alpha}\left[\tilde{Q}^{\alpha}\tilde{P}_{\beta}\right]+\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{\tilde{P}}_{\alpha}\left[\tilde{P}_{\alpha}\tilde{P}_{\beta}\right]=-\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}\frac{\partial P_i}{\partial\tilde{P}_{\beta}}-\frac{\partial Q^i}{\partial\tilde{P}_{\beta}}\frac{\partial P_i}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial H}{\partial\tilde{P}_{\beta}},$$

$$\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{\tilde{Q}}^{\alpha}\left[\tilde{Q}^{\alpha}\tilde{Q}^{\beta}\right]+\sum_{\alpha=o}^{N}\dot{\tilde{P}}_{\alpha}\left[\tilde{P}_{\alpha}\tilde{Q}^{\beta}\right]=-\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}\frac{\partial P_i}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}-\frac{\partial Q^i}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}\frac{\partial P_i}{\partial\tau}\right)-\frac{\partial H}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}.$$

Преобразуем правые части этих уравнений

$$-\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}\frac{\partial P_i}{\partial\tilde{P}_{\beta}}-\frac{\partial Q^i}{\partial\tilde{P}_{\beta}}\frac{\partial P_i}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial H}{\partial\tilde{P}_{\beta}}=-\frac{\partial}{\partial\tilde{P}_{\beta}}\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}P_i+\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\tilde{P}_{\beta}}P_i+\frac{\partial H}{\partial\tilde{P}_{\beta}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\tilde{P}_{\beta}}\left(-\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}P_i+\frac{1}{c}F+H\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{P}_{\beta}},$$

$$-\sum_{i=o}^{N}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}\frac{\partial P_i}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}-\frac{\partial Q^i}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}\frac{\partial P_i}{\partial\tau}\right)-\frac{\partial H}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}=-\frac{\partial}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}P_i+\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\tilde{Q}^{\beta}}P_i-\frac{\partial H}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}\left(-\sum_{i=o}^{N}\frac{\partial Q^i}{\partial\tau}P_i+\frac{1}{c}F-H\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}.$$

Учитывая значения скобок Лагранжа, получаем $\dot{\tilde{Q}}^{\beta}=\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{P}_{\beta}},\quad \dot{\tilde{P}}_{\beta}=-\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{Q}^{\beta}}.$

3. Перейдем к рассмотрению структурных формул критерия каноничности преобразования. Равенства (*) и (**) можно объединить в одно

$$\left[\sum_{i=1}\tilde{P}_i\dot{\tilde{Q}}^i-\sum_{i=1}\dot{\tilde{P}}_j\tilde{Q}^j-\tilde{H}\left(\tau,\tilde{Q},\tilde{P}\right)\right]-c\left[\sum_{\alpha=1}P_{\alpha}\dot{Q}^{\alpha}-\sum_{\beta=1}\dot{P}_{\beta}Q^{\beta}-H(\tau,Q,P)\right]=$$

$$=-\frac{d}{d\tau}F\left(\tau,Q,\tilde{Q},P,\tilde{P}\right)=-\frac{\partial F}{\partial\tau}-\sum_{i=1}\frac{\partial F}{\partial\tilde{Q}^i}\dot{\tilde{Q}}^i-\sum_{i=1}\frac{\partial F}{\partial\tilde{P}_j}\dot{\tilde{P}}_j-\sum_{\alpha=1}\frac{\partial F}{\partial Q^{\alpha}}\dot{Q}^{\alpha}-\sum_{\beta=1}\frac{\partial F}{\partial P_{\beta}}\dot{P}_{\beta}$$

Приравнивая свободные члены и коэффициенты перед $\dot{\tilde{Q}}^i,\dot{\tilde{P}}_i,\dot{Q}^{\alpha},\dot{P}_{\alpha}$, получаем

$$\tilde{H}=cH+\frac{dF}{d\tau},\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial Q^{\alpha}}=cP_{\alpha},\quad \frac{\partial F}{\partial P_{\beta}}=-cQ^{\beta},\\ &\frac{\partial F}{\partial\tilde{Q}^i}=-\tilde{P}_i,\quad \frac{\partial F}{\partial\tilde{P}_j}=\tilde{Q}^j.\end{aligned}$$

В качестве независимых переменных можно выбрать половину исходных переменных и вторую половину новых переменных. Это возможно, если какие либо $N+1$ выражений из $\tilde{Q}=\tilde{Q}(\tau,Q,P)$, $\tilde{P}=\tilde{P}(\tau,Q,P)$ разрешимы относительно исходных переменных: $\det\left(\dfrac{\partial\tilde{Q}}{\partial Q}\right)\neq 0\to Q=Q\left(\tau,P,\tilde{Q}\right)\to\tilde{P}=\tilde{P}\left[\tau,Q\left(\tau,P,\tilde{Q}\right),P\right]\to F\left(\tau,P,\tilde{Q}\right);$

$$\det\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial P}\right)\neq 0\to P=P\left(\tau,Q,\tilde{Q}\right)\to\tilde{P}=\tilde{P}\left[\tau,Q,P\left(\tau,Q,\tilde{Q}\right)\right]\to F\left(\tau,Q,\tilde{Q}\right);$$

$$\det\left(\frac{\partial\tilde{P}}{\partial Q}\right)\neq 0\to Q=Q\left(\tau,P,\tilde{P}\right)\to\tilde{P}=\tilde{P}\left[\tau,Q\left(\tau,P,\tilde{P}\right),P\right]\to F\left(\tau,P,\tilde{P}\right);$$

$$\det\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial P}\right)\neq 0\rightarrow P=P\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)\rightarrow P=P\left[\tau,Q,P\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)\right]\rightarrow F\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right).$$

Например, подстановка решений $P=P\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)$ в выражения $\widetilde{Q}=\widetilde{Q}(\tau,Q,P)$ дает $\widetilde{Q}=\widetilde{Q}\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)$. Валентность и производящая функция определяются структурными формулами $\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}=cP_\alpha\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)$, $\frac{\partial F}{\partial\widetilde{P}_j}=\widetilde{Q}^j\left(\tau,Q,\widetilde{P}\right)$, если выполнены условия существования производящей функции $\frac{\partial^2 F}{\partial Q^\alpha\partial Q^\beta}=c\frac{\partial P_\beta}{\partial Q^\alpha}=c\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\widetilde{P}_j\partial Q^\alpha}=c\frac{\partial P_\alpha}{\partial\widetilde{P}_j}=\frac{\partial\widetilde{Q}^j}{\partial Q^\alpha},\qquad\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\widetilde{P}_j\partial\widetilde{P}_i}=\frac{\partial\widetilde{Q}^i}{\partial\widetilde{P}_j}=\frac{\partial\widetilde{Q}^j}{\partial\widetilde{P}_i}.$$

3.1. Покажем, что переход к независимым переменным в уравнениях Гамильтона

$$\dot{Q}^\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_\alpha},\quad \dot{\varphi}^\nu=\sum_{\alpha=o}^{N}l_\alpha^\nu\dot{Q}^\alpha=0,\quad \nu=\overline{0,M},\quad \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial Q^\alpha}-\sum_{\nu=o}^{M}\lambda_\nu l_\alpha^\nu,\quad \alpha=\overline{0,N}$$

с конечными связями является каноническим преобразованием.

Уравнения связей $x^\nu=\varphi^\nu\left(Q^o,...,Q^N\right)=const$, $\nu=\overline{0,M}$ позволяют выразить все исходные координаты как функции независимых координат q^i, $i=\overline{1,n}$, $n=N-M$.

$Q^\alpha=Q^\alpha(q,x)=-\frac{\partial V}{\partial P_\alpha}$, $\alpha=\overline{0,N}$ и наоборот – все независимые координаты как функции исходных координат

$$q^i=q^i(Q)=\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad i=\overline{o,n},\quad x^\nu=\varphi^\nu(Q)=\frac{\partial W}{\partial y_\nu},\quad \nu=\overline{1,M}.$$

Производящая функция этого преобразования в (P,q) описании имеет вид $V(P,q)=-\sum_{\alpha=o}^{N}P_\alpha Q^\alpha(q,x)$ либо в (Q,p) описании $W(Q,p)=\sum_{i=o}^{n}p_i q^i(Q)+\sum_{\nu=1}^{M}y_\nu x^\nu(Q)$.

В этих преобразованиях задействованы только связи, стационарные по τ.
Соответствующие импульсы введем соотношениями

$$P_\alpha=\frac{\partial W}{\partial Q^\alpha}=\sum_{i=o}^{n}p_i\frac{\partial q^i}{\partial Q^\alpha}+\sum_{\nu=1}^{M}y_\nu\frac{\partial x^\nu}{\partial Q^\alpha},\quad \alpha=\overline{0,N}$$

либо

$$p_i=-\frac{\partial V}{\partial q^i}=\sum_{\alpha=o}^{N}P_\alpha\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^i},\quad i=\overline{o,n}$$

$$y_\nu=-\frac{\partial V}{\partial x^\nu}=\sum_{\alpha=o}^{N}P_\alpha\frac{\partial Q^\alpha}{\partial x^\nu},\quad \nu=\overline{1,M}.$$

Отметим равенство нулю скобок Пуассона

$$\left(q^i x^\nu\right)=0,\quad \left(x^\nu x^\mu\right)=0,\quad \left(p_i x^\nu\right)=-\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial Q^\alpha}=-\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial q^i}=0.$$

Все величины q,x,p в скобках Пуассона рассматриваются как функции Q,P. Таким образом, любая функция переменных q,x,p находится в инволюции с функциями $\varphi^\nu(Q)$, $\nu=\overline{1,M}$. Существование производящей функции обеспечивает каноничность рассмотренного перехода от переменных Q^α,P_α, $\alpha=\overline{0,N}$ к переменным

$q^i, p_i, \quad i=\overline{o,n}, \qquad x^\nu, y_\nu, \quad \nu=\overline{1,M}$ и выполнение критерия каноничности в виде скобок Лагранжа $\left[q^\alpha q^\beta\right]=0, \quad \left[p_\alpha p_\beta\right]=0, \quad \left[q^\alpha p_\beta\right]=\delta^\alpha_\beta, \quad \alpha,\beta=\overline{0,N}$. Функции $x^\nu, y_\nu, \quad \nu=\overline{1,M}$ обозначены здесь как $q^\alpha, p_\alpha, \quad \alpha=\overline{n+1,N}$

Переходя к новым переменным, получаем

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}-\lambda_o\delta_{io} \quad i=\overline{o,n}$$

$$\dot{x}^\nu=\frac{\partial H}{\partial y_\nu}=0, \quad y_i=-\frac{\partial H}{\partial x^\nu}-\lambda_\nu \qquad \nu=\overline{1,M}$$

Для натуральной системы функция Гамильтона имеет вид

$$H(q,x,p,y)=\frac{1}{2}\sum_{ij=o}^{n}A^{ij}p_ip_j+\sum_{i=o}^{n}\sum_{\nu=1}^{M}A^{i\nu}p_ip_\nu+\frac{1}{2}\sum_{\nu\mu=1}^{M}y_\nu y_\mu+\varPi(q,x).$$

Отметим возможность исключения импульсов $y_\nu, \quad \nu=\overline{1,M}$ из первых $2n$ уравнений. Из равенств $\dot{x}^\nu=\sum_{j=o}^{n}A^{\nu j}p_j+\sum_{\lambda=1}^{M}A^{\nu\lambda}y_\lambda=0, \quad \nu=\overline{1,M}$ можно выразить импульсы $y_\mu, \quad \mu=\overline{1,M}$. Пусть $B_{\nu\lambda}$ – матрица, обратная матрице $A^{\lambda\mu}$, то есть $\sum_{\lambda=1}^{M}B_{\nu\lambda}A^{\lambda\mu}=\delta^\mu_\nu, \quad \nu,\mu=\overline{1,M}$. Тогда $y_\mu=-\sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=o}^{n}B_{\mu\nu}A^{\nu j}p_j, \quad \mu=\overline{1,M}$ и

$$\dot{q}^i=\sum_{j=o}^{n}\left(A^{ij}-\sum_{\mu\nu=1}^{M}A^{i\mu}B_{\mu\nu}A^{\nu j}\right)p_j, \quad i=\overline{o,n}.$$

Из процедуры Фробениуса обращения блочных матриц следует, что

$$\sum_{\alpha=o}^{n}A_{i\nu}\left(A^{\alpha j}-\sum_{\mu\nu=1}^{M}A^{\alpha\mu}B_{\mu\nu}A^{\nu j}\right)=\delta^j_i, \quad i,j=\overline{o,n},$$

где $A_{i\alpha}, \quad i,\alpha=\overline{0,N}$ – матрица кинетической энергии в переменных $\dot{q}^i,\dot{x}^\nu, \quad i=\overline{o,n}, \quad \nu=\overline{1,M}$. Таким образом, матрица кинетической энергии системы в переменных $\dot{q}^i, p_i, \quad i=\overline{o,n}$ имеет вид $a^{ij}=A^{ij}-\sum_{\mu\nu=1}^{M}A^{i\mu}B_{\mu\nu}A^{\nu j}, \quad i,j=\overline{o,n}$. Исключение импульсов $y_\mu, \quad \mu=\overline{1,M}$ из второй группы уравнений дает

$$\dot{p}_s=-\frac{1}{2}\sum_{ij}^{n}\frac{\partial A^{ij}}{\partial q^s}p_ip_j-\sum_{i=o}^{n}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\partial A^{i\mu}}{\partial q^s}p_iy_\mu-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{M}\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial q^i}y_\alpha y_\beta-\frac{\partial \varPi}{\partial q^i}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{ij}^{n}\frac{\partial A^{ij}}{\partial q^s}p_ip_j+\frac{1}{2}\sum_{i=o}^{n}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\partial A^{i\mu}}{\partial q^s}p_i\sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=o}^{n}B_{\mu\nu}A^{\nu j}p_j+\frac{1}{2}\sum_{j=o}^{n}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\partial A^{j\mu}}{\partial q^s}p_j\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{i=o}^{n}B_{\nu\mu}A^{\mu j}p_i-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{M}\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial q^s}\sum_{\nu=1}^{M}\sum_{i=o}^{n}B_{\alpha\nu}A^{\nu i}p_i\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{j=o}^{n}B_{\beta\mu}A^{\mu j}p_j-\frac{\partial \varPi}{\partial q^i}=-\frac{1}{2}\sum_{ij=o}^{n}\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^s}p_ip_j-\frac{\partial \varPi}{\partial q^i}, \quad s=\overline{o,n}$$

Этот результат становится очевидным, если учесть тождество

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{M}B_{\alpha\nu}\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial q^s}B_{\beta\mu}=-\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q^s}, \quad \nu,\mu=\overline{1,M}.$$

Итак, переход к независимым переменным q,p сводится к подстановке выражений для импульсов $y=y(x,q,p)$ в функцию Гамильтона $H\left[x,q,y(x,q,p),p\right]$.

Возможен обратный переход от системы $\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{ij=o}^{n}a^{ij}p_i p_j$ к системе со связями $\vec{T}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=o}^{N}A^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta$. Для этого уравнения связей следует ввести в виде $\dot{x}^\mu=\sum_{j=o}^{n}A^{\mu j}p_j+\sum_{\nu=n+1}^{N}A^{\mu\nu}y_\nu=0,\quad \mu=\overline{n+1,N}$, где $\det A^{\nu\mu}\neq 0$ и $\sum_{\nu=n+1}^{N}B_{\lambda\nu}A^{\nu\mu}=\delta_\nu^\mu$.

Далее формируется матрица $A^{ij}=a^{ij}+\sum_{\nu\lambda=n+1}^{N}A^{i\nu}B_{\nu\lambda}A^{\lambda j}$ и союзное выражение кинетической энергии $\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{ij=o}^{n}A^{ij}p_i p_j+\sum_{\nu=n+1}^{N}\sum_{j=o}^{n}A^{\nu i}y_\nu p_i+\frac{1}{2}\sum_{\nu\mu=n+1}^{N}A^{\nu\mu}y_\nu y_\mu$