Лекция 2.8.
Вариация действия по Гамильтону
Теорема Э.Нётер Интегральные инварианты

1. При рассмотрении принципа Гамильтона решалась вариационная задача с закрепленными концами. Теперь будем считать, что начальная и конечная точки также могут варьироваться.

Определение. *Проварьировать путь* $q(t)$ *означает включить его в однопараметрическое семейство путей* $\tilde{q}(\alpha,t)$ *между точками* $A\{t_o(\alpha),\tilde{q}_o[\alpha,t_o(\alpha)]\}$ *и* $A\{t_1(\alpha),\tilde{q}_1[\alpha,t_1(\alpha)]\}$ *так, что*

$$\tilde{q}(o,t)=q(t),\quad \dot{\tilde{q}}(o,t)=\dot{q}(t),\qquad \delta q(t)=\left.\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha\,,$$

$$\frac{d}{dt}\delta q(t)=\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left.\frac{d\tilde{q}}{dt}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha=\delta\dot{q}(t),$$

$$\delta t_o=\left.\frac{\partial t_o}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha,\quad \delta t_1=\left.\frac{\partial t_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha,\qquad \delta L(t,q,\dot{q})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\right),$$

$$\delta q_o=\left.\frac{\partial\tilde{q}_o}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha+\left.\frac{\partial\tilde{q}_o}{\partial t}\right|_{\alpha=o}\delta t_o=\left.\frac{\partial\tilde{q}_o}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha+\dot{q}_o\delta t_o,$$

$$\delta q_1=\left.\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha+\left.\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial t}\right|_{\alpha=o}\delta t_1=\left.\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\delta\alpha+\dot{q}_1\delta t_1.$$

Вычислим вариацию действия по Гамильтону.

$$\delta W=\delta\int_{t_o(\alpha)}^{t_1(\alpha)}L(t,q,\dot{q})dt=L(t_1q,\dot{q})\delta t_1-L(t_oq,\dot{q})\delta t_o+\int_{t_o(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\right)dt=$$

$$=L(t_1q,\dot{q})\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}^i}\left.\frac{\partial\tilde{q}_1^i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha-$$

$$-L(t_oq,\dot{q})\delta t_o-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_o}{\partial\dot{q}^i}\left.\frac{\partial\tilde{q}_o^i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o}\delta\alpha-\int_{t_o(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\delta q^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)dt=$$

$$=L(t_1q,\dot{q})\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}^i}\delta q_1^i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}_1^i\delta t_1-$$

$$-L(t_oq,\dot{q})\delta t_o-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_o}{\partial\dot{q}^i}\delta q_o^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_o}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}_o^i\delta t_o-\int_{t_o(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\delta q^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)dt=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right]_o^1-\int_{t_o}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}q^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)dt$$

2. Отметим факт ковариантности уравнений Лагранжа при одновременной замене координат и времени. Переход к новым переменным $t=t(\tilde{t},\tilde{q})$, $q=q(\tilde{t},\tilde{q})$ в выражении действия по Гамильтону снова приводит после варьирования к прямому пути. Функция W как определенный интеграл

на прямом пути будет иметь то же значение. Образ $\tilde{q}(\tilde{t})$ прямого пути $q(t)$ есть решение уравнений Лагранжа в новых переменных.
Подсчитаем элементарное действие в новых переменных:

$$L\left(t,q,\frac{dq}{dt}\right)dt = L\left[t(\tilde{t},\tilde{q}),q(\tilde{t},\tilde{q}),\left.\frac{dq}{dt}\right|_{\tilde{t},\tilde{q}}\right]\left.\frac{dt}{d\tilde{t}}\right|_{\tilde{t},\tilde{q}} d\tilde{t} = \tilde{L}\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right)d\tilde{t}\,, \qquad \text{где}$$

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{\tilde{t},\tilde{q}} = \frac{\dfrac{\partial q(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{t}} + \sum_k \dfrac{\partial q(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^k}\dfrac{dq^k}{d\tilde{t}}}{\dfrac{\partial t(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{t}} + \sum_k \dfrac{\partial t(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{q}_k}\dfrac{dq^k}{d\tilde{t}}}, \qquad \left.\frac{dt}{d\tilde{t}}\right|_{\tilde{t},\tilde{q}} = \frac{\partial t(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{t}} + \sum_k \frac{\partial t(\tilde{t},\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^k}\frac{dq^k}{d\tilde{t}}$$

Определение. *Преобразованием вариационной симметрии в системе с функцией Лагранжа* $L(t,q,\dot{q})$ *называется неособенное преобразование* $t,q \Longleftrightarrow \tilde{t},\tilde{q}$ *расширенного координатного пространства, для которого элементарное действие форм инвариантно, то есть имеет одинаковый вид в старых и новых переменных* $L\left(t,q,\frac{dq}{dt}\right)dt = L\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right)d\tilde{t}$.

Теорема Эмми Нётер. *Если элементарное действие форм инвариантно относительно однопараметрического неособенного преобразования* $\tilde{t}(t,q,\alpha)_{\alpha=o} = t$, $\quad \tilde{q}(t,q,\alpha)_{\alpha=o} = q$, *то имеет место первый интеграл*

$$w = \sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial\tilde{q}^i(t,q,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o} - H\left.\frac{\partial\tilde{t}(t,q,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o}.$$

Доказательство теоремы состоит в дифференцировании функции Лагранжа $L\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}$ по параметру α с последующей подстановкой $\alpha = 0$. При этих вычислениях имеем $\left.\frac{d\tilde{t}}{dt}\right|_{\alpha=o} = 1$, $\left.\frac{\partial L}{\partial\tilde{t}}\right|_{\alpha=o} = \frac{\partial L}{\partial t}$, $\left.\frac{\partial L}{\partial\tilde{q}^i}\right|_{\alpha=o} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$,

$$\left.\frac{\partial L}{\partial\left(d\tilde{q}^i/d\tilde{t}\right)}\right|_{\alpha=o} = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}, \qquad \left.\frac{d}{d\alpha}\frac{d\tilde{q}^i}{d\tilde{t}}\right|_{\alpha=o} = \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\tilde{q}^i}{dt}\middle/\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)\right|_{\alpha=o} =$$

$$= \left.\left[\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}^i}{d\alpha}\frac{d\tilde{t}}{dt} - \frac{d\tilde{q}^i}{dt}\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha}\right]\middle/\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2\right|_{\alpha=o} = \frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}^i}{d\alpha} - \dot{q}^i\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha}$$

Выполним это дифференцирование : $\quad \frac{d}{d\alpha}\left\{L\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right\}_{\alpha=o} =$

$$= \left\{\frac{\partial L}{\partial\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\tilde{q}^i}\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\left(d\tilde{q}^i/d\tilde{t}\right)}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial\alpha} - \dot{\tilde{q}}^i\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha}\right) + L\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha}\right\}_{\alpha=o} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\left.\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=o} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right)\left.\frac{d\tilde{t}}{d\alpha}\right|_{\alpha=o}\right\} = \frac{dw}{dt}.$$

Форм инвариантность функции Лагранжа означает отсутствие в её выражении параметра α, поэтому значение производной по параметру α равно нулю. С другой стороны выражение для этой производной совпадает с производной по времени выражения w. Итак, $w = const$. ***Теорема доказана.***

Пример. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса как следствие вариационной симметрии системы с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} - \Pi(r_{ij}), \qquad r_{ij} = \sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}\ .$$

Этой функции Лагранжа соответствуют функция Гамильтона - энергия системы (в лагранжевых переменных) $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \Pi(r_{ij})$, элементарное действие

$$L\frac{d\tilde{t}}{dt} = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{d\tilde{t}}\right)^2 - \Pi(\tilde{r}_{ij})\right]\frac{d\tilde{t}}{dt}$$ и интегралы $w = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \left.\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=o} - \left.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=o} H$.

1. Сдвиг по времени $\tilde{t} = t - \alpha, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i$. Это преобразование удовлетворяет всем условиям теоремы Э.Нётер и $w = H = const$.

2. Сдвиг в пространстве $\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \alpha\,\mathbf{e}$, $\mathbf{e}-$ единичный вектор. Условия теоремы Э.Нётер выполнены и $w = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i\,\mathbf{e} = const -$ проекция импульса системы на ось $\mathbf{e}$.

3. Поворот вокруг оси с направляющими косинусами e_x, e_y, e_z на угол α описывается преобразованием $\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \Lambda \circ \mathbf{r}_i \circ \Lambda^*$, где $\Lambda = \cos\frac{\alpha}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\alpha}{2} -$ кватернион поворота. Это преобразование оставляет неизменной скалярную часть любого преобразуемого кватерниона, поэтому

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{dt} = \Lambda \circ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \circ \Lambda^* \quad \to \quad \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{d\tilde{t}} \circ \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{d\tilde{t}} = \Lambda \circ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \circ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \circ \Lambda^* = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \circ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \tilde{\mathbf{r}}_j - \tilde{\mathbf{r}}_i = \Lambda \circ (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \circ \Lambda^* = \Lambda \circ \mathbf{r}_{ij} \circ \Lambda^* \quad \to \quad \tilde{\mathbf{r}}_{ij} \circ \tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \Lambda \circ \mathbf{r}_{ij} \circ \mathbf{r}_{ij} \circ \Lambda^* = \mathbf{r}_{ij} \circ \mathbf{r}_{ij}.$$

Условия теоремы Э.Нётер выполнены $\left.\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=o} = \frac{1}{2}\mathbf{e} \circ \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\mathbf{r}_i \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i$ и $w = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i\,(\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = const -$ проекция момента импульса на ось $\mathbf{e}$.

Пример. Законы сохранения для релятивистской частицы с функцией Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2}m_o\left(\frac{dx^o}{d\tau}\frac{dx^o}{d\tau} - \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}m_o \mathbf{r} \circ \tilde{\mathbf{r}}\,, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{r} = ix^o + \tau_\alpha x^\alpha .$$

Преобразование Лоренца при движении системы координат со скоростью $\mathbf{V} = \tau_\alpha V^\alpha$ описывается преобразованием $T = \tau, \quad \mathbf{R} = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}^*$, где

$$\Lambda = ch\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}ish\frac{\varphi}{2}, \quad ch\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,, \quad sh\varphi = \frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,, \quad \mathbf{e} = \tau_\alpha e^\alpha = \tau_\alpha \frac{V^\alpha}{V}\,,$$

которое оставляет элементарное действие форм инвариантным :

$$\frac{1}{2}m_o\mathbf{R}\circ\widetilde{\mathbf{R}}\,dT=\frac{1}{2}m_o\Lambda\circ\mathbf{r}\circ\widetilde{\Lambda}^*\circ\Lambda^*\circ\widetilde{\mathbf{r}}\circ\widetilde{\Lambda}d\tau=\frac{1}{2}m_o\mathbf{r}\circ\widetilde{\mathbf{r}}d\tau\,.$$

Условия теоремы Э.Нётер выполнены,

$$\left.\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=o}=\frac{1}{2}\mathbf{e}i\circ\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{r}\circ\mathbf{e}i=i\mathbf{e}x^o-ie^\alpha x^\alpha$$

$$w=m_o\frac{dx^o}{d\tau}ie^\alpha x^\alpha+m_o\frac{dx^\alpha}{d\tau}ie^\alpha x^o=im_o\frac{d}{d\tau}\left(x^o\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{V}\right)=const$$

3. Для гамильтоновых систем, кроме законов сохранения – первых интегралов – имеют место законы сохранения особого вида: интегральные инварианты.

Определение. *Трубкой прямых путей называется совокупность решений гамильтоновой системы, проходящих через односвязное многообразие, ограниченное замкнутым контуром* $C:t(\alpha),q(\alpha),p(\alpha),\quad 0\le\alpha\le1$.

Каждая точка контура представляет собой полный набор начальных данных для уравнений Гамильтона и определяет единственное решение – прямой путь. На трубке прямых путей можно выбрать два каких-либо согласованных контура C_o, C_1. Контуры и параметр α будем считать согласованными, если для каждого значения α соответствующие точки контуров расположены на одном прямом пути. Тогда трубка прямых путей и согласованные контуры определяют действие по Гамильтону как функцию параметра α и $W(0)=W(1)$. Для семейства прямых путей вариация действия по Гамильтону имеет вид $\delta W(\alpha)=\left[\sum_{i=o}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right]_{C_o}^{C_1}$. Интегрируя это выражение по параметру α в пределах $[0,l]$, получаем $\int_o^l\delta W(\alpha)=W(l)\big|_o^l=0$, то есть $\oint_{C_1}\left(\sum_{i=o}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)=\oint_{C_o}\left(\sum_{i=o}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)$.

Выражение $J_{PK}=\oint_C\left(\sum_{i=o}^{n}p_i\delta q^i-H\delta t\right)=const$ называют относительным *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.* Термин “относительный” отражает факт инвариантности в смысле интегрирования по замкнутому контуру.

Если контуры $\widetilde{C}$ изохронны, то есть возникают при сечении трубки плоскостями $t=const$, то инвариант принимает вид *универсального интегрального инварианта Пуанкаре* $J_1=\oint_{\widetilde{C}}\sum_{i=o}^{n}p_i\delta q^i=const$. Значение константы для обоих инвариантов определяется контуром и не зависит от самой гамильтоновой системы : $J_1=\sum_{i=1}^{n}\oint_{\widetilde{C}}p_i\delta q^i=\sum_{i=1}^{n}\pm S_i$.

Инвариантность рассмотренных интегралов может быть принята за аксиому динамики. Теоремы, обосновывающие этот факт, носят название обратных терем теории интегральных инвариантов.

Теорема. *Если имеет место универсальный интегральный инвариант Пуанкаре для трубки прямых путей системы* $\dot{q}^i = Q_i(t,q,p), \quad \dot{p}_i = P_i(t,q,p), \quad i = \overline{1,n}$, *то существует функция Гамильтонова* $H(t,q,p)$ *и* $Q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$.

Наличие инварианта $J_1 = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \delta q^i = \int\limits_{o}^{l} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t,\alpha) \dfrac{\partial q^i(t,\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = const$ означает перенос решениями $q(t,\alpha), p(t,\alpha)$ точек начального контура $\tilde{C}_o$, а его производная по времени дает равенство $\dfrac{dJ_1}{dt} = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dot{p}_i \delta q^i + p_i \delta \dot{q}^i\right) =$

$$= \oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \delta q^i + p_i \delta Q_i\right) = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \delta\left(p_i Q_i\right) + \oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \delta q^i - Q_i \delta p_i\right) = 0.$$

Итак, при любом t $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(P_i \delta q^i - Q_i \delta p_i\right) = -\delta H(t,q,p) = -$ изохронный дифференциал и $Q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = \overline{1,n}$. ***Теорема доказана.***

Теорема. *Если имеет место интегральный инвариант типа инварианта Пуанкаре Картана* $J_1 = \oint\limits_{C} \left(\sum\limits_{i=o}^{n} p_i \delta q^i - \Phi \delta t \right) = const$ *для трубки прямых путей системы* $\dot{q}^i = Q_i(t,q,p), \quad \dot{p}_i = P_i(t,q,p), \quad i = \overline{1,n}$, *то эта система гамильтонова, то есть* $Q_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad P_i = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q^i}$.

Данный инвариант на изохронном контуре превращается в универсальный интегральный инвариант Пуанкаре

$$\oint\limits_{C} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i - \Phi \delta t \right) = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i = \oint\limits_{C} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i - H \delta t \right) = const.$$

По предыдущей теореме система гамильтонова и $\oint\limits_{C} (H - \Phi)\delta t = 0$.

В силу произвольности контура имеем

$$(H - \Phi)\delta t = \delta G(t,q,p) = \frac{\partial G}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\delta p_i \right)$$

то есть $H = \Phi + \dfrac{\partial G(t)}{\partial t}$ ***Теорема доказана.***

Обратные теоремы, например, могут быть использованы при рассмотрении вопросов замены переменных в уравнениях Гамильтона. Пусть в гамильтоновой системе делается неособенный переход к новым координатам и новому времени $\quad \tilde{q}^i = \tilde{q}^i\left(q^o, q^1, \ldots q^n\right), \quad i = \overline{o,n}, \quad \det\left(\frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^i}\right) \neq 0$.

Какому преобразованию требуется подвергнуть обобщенные импульсы, чтобы в результате исходная система осталась бы гамильтоновой. Выбор $\tilde{p}$ и $\tilde{H}$ подчиним условию $\quad \sum_{j=1}^{n} p_j \delta q^j - H\delta t = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}^i - \tilde{H}\delta \tilde{q}^o =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial t}\delta t + \sum_{ji=o}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j}\delta q^j - \tilde{H}\frac{\partial \tilde{q}^o}{\partial t}\delta t - \tilde{H}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \tilde{q}^o}{\partial q^j}\delta q^j .$$

Приравняем коэффициенты при дифференциалах $\delta t, \delta q^j$:

$$H = \tilde{H}\frac{\partial \tilde{q}^o}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial t}, \quad p_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} - \tilde{H}\frac{\partial \tilde{q}^o}{\partial q^j}, \quad j = \overline{1,n} .$$

Эти уравнения решают поставленную задачу.

4. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре можно записать в виде интеграла по поверхности $\quad J_1 = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i = \iint_S \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \delta q^i = J_2$.

Аналогичным образом в $2n-$мерном пространстве можно построить универсальные относительные инварианты J_{2k-1} и абсолютные интегральные инварианты J_{2k}:

$$J_3 = \oint_C \iint_S \sum_{i\neq k}^{n} p_i \delta q^i \delta p_k \delta q_k = \pm S_k \sum_{i\neq k}^{n} \pm S_i = \iint_S \iint_S \sum_{i\neq k}^{n} \delta p_i \delta q^i \delta p_k \delta q_k = J_4,$$

...

$$J_{2n-1} = \oint_C \int_{V_{2n-1}} \ldots \int p_1 \delta q^1 \delta p_2 \ldots \delta q_n = \prod_{i=1}^{n} \pm S_i = \int_{V_{2n}} \ldots \int \delta p_1 \delta q^1 \delta p_2 \ldots\ldots \delta q_n = J_{2n}$$

Докажем инвариантность интеграла J_{2n}, то есть неизменность некоторого начального объёма в фазовом пространстве при перемещении каждой его точки по траекториям гамильтоновой системы.

Теорема. Ж. Лиувилля. *Величина фазового объема не меняется при перемещении точек объема по траекториям гамильтоновой системы.*

При движении гамильтоновой системы $\quad q^i = q^i\left(t, q_o^i, p_{io}\right), \quad p_i = p_i\left(t, q_o^i, p_{io}\right)$ начальный фазовый объем $J_{2n}(0)$ преобразуется в объем

$$J_{2n}(t) = \int \ldots \int \delta p_1 \ldots \delta q^n = \int \ldots \int I \delta p_{1o} \ldots \delta q_o^n ,$$

где $\quad I = \det \dfrac{\partial\left(q^1, p_1, \ldots, q^n, p_n\right)}{\partial\left(q_o^1, p_{1o}, \ldots, q_o^n, p_{no}\right)} -$ якобиан преобразования.

В начальный момент якобиан равен единице. Покажем, что значение якобиана сохраняется:

$$dI/dt=\sum_{i=1}^{n}I_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\det\frac{\partial(\ldots,\dot q^i,p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}+\det\frac{\partial(\ldots,q^i,\dot p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\det\frac{\partial(\ldots,\partial H/\partial p_i,p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}-\det\frac{\partial(\ldots,q^i,\partial H/\partial q^i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}\right]=$$

$$=\sum_{ij=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q^j}\det\frac{\partial(\ldots,q^j,p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}+\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}\det\frac{\partial(\ldots,p_j,p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 H}{\partial q^i\partial q^j}\det\frac{\partial(\ldots,q^i,q^j,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}-\frac{\partial^2 H}{\partial q^i\partial p_j}\det\frac{\partial(\ldots,q^i,p_j,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q^i}-\frac{\partial^2 H}{\partial q^i\partial p_i}\right)\det\frac{\partial(\ldots,q^i,p_i,\ldots)}{\partial(q_o^1,p_{1o},\ldots,q_o^n,p_{no})}=0$$

Все остальные детерминанты равны нулю, поскольку содержат одинаковые строки. Итак, $\frac{dJ_{2n}}{dt}=\int\ldots\int\frac{dI}{dt}\delta q^1\ldots\delta p_n=0$. ***Теорема доказана.***

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Если* $J=\oint_C\sum_{i=1}^{n}\left[A_i(t,q,p)\delta q^i+B_i(t,q,p)\delta p_i\right]-$ *универсальный относительный интегральный инвариант, то* $J=cJ_1$, *где* $c-$ *постоянная, а* J_1- *интеграл Пуанкаре.*

Доказательство проведем для одномерного случая. Подставляя в выражение инварианта решения какой-либо гамильтоновой системы

$$q(t,\alpha)=q[t,q_o(\alpha),p_o(\alpha)],\quad p(t,\alpha)=p[t,q_o(\alpha),p_o(\alpha)]$$

получим $J(t)=\oint_C[A(t,q,p)\delta q+B(t,q,p)\delta p]$. Тогда

$$\frac{dJ}{dt}=o=\oint_C\left[\frac{dA}{dt}\delta q+\frac{dB}{dt}\delta p+A\delta\frac{dq}{dt}+B\delta\frac{dp}{dt}\right]=$$

$$=\oint_C\left[\frac{dA}{dt}\delta q-\frac{dq}{dt}\delta A+\frac{dB}{dt}\delta p-\frac{dp}{dt}\delta B\right]=$$

$$=\oint_C\left\{\left[\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\dot p+\frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q+\left[\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\dot q+\frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p\right\},$$

то есть выражение под интегралом являются полным дифференциалом.

Введем обозначение $Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(Z\dot p+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\dot q+\frac{\partial B}{\partial t}\right)\quad\rightarrow$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p}-Z\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial p}=-\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}-Z\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial q}$$

и $-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}+\frac{\partial Z}{\partial t}=0$. Произвольность функции H означает, что $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)=0$.

Таким образом, $\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=const=c$, $\frac{\partial(A-cp)}{\partial p}=\frac{\partial B}{\partial q}$ и, следовательно, сущестует функция $\Phi(t,q,p)$, такая что $(A-cp)\delta q+B\delta p=\delta\Phi$

или $A\delta q+B\delta p=cp\delta q+\delta\Phi$ и поэтому

$J(t)=\oint\limits_C[A(t,q,p)\delta q+B(t,q,p)\delta p]=c\oint\limits_C p\delta q=cJ_1$ ***Теорема доказана.***