Лекция 2.5.
Малые колебания склерономной системы
Вынужденные колебания Частотные характеристики

1. Рассмотрим малые колебания консервативной системы при наличии диссипативных сил $Q_i = -\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$, где $R = \dfrac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0$ - функция Релея.

Уравнения динамики $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

либо в матричном виде $A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0$.

Поскольку три квадратичные формы одним преобразованием привести к диагональному виду нельзя, можно ввести переменные $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ и записать уравнения в виде $A\dot{\mathbf{p}} + B\mathbf{p} + C\mathbf{q} = 0, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$.

1.1. Рассмотрение начнем с одной степени свободы

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_o{}^2 q = 0, \quad 2h = b/a, \quad \omega_o{}^2 = c/a.$$

Положим $q = xy$ и запишем исходное уравнение в виде

$$\ddot{x}y + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} + 2h(\dot{x}y + x\dot{y}) + \omega_o{}^2 xy =$$

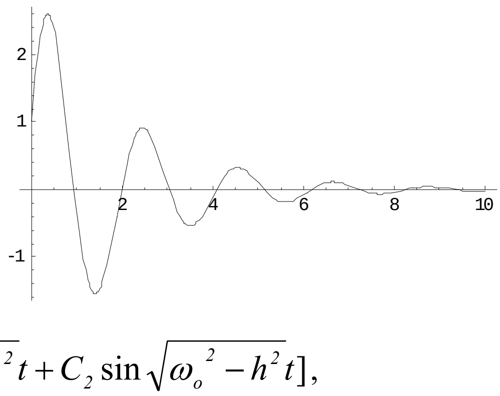
$$= \ddot{x}y - x\ddot{y} + \omega_o{}^2 xy + 2x\frac{d}{dt}(\dot{y} + hy) + 2\dot{x}(\dot{y} + hy) = 0,$$

Здесь выделено уравнение $\dot{y} + hy = 0$, из которого следует $y = \exp(-ht)$.

Для функции x получаем уравнение $\ddot{x} + \left(\omega_o{}^2 - h^2\right)x = 0$.

Тот же результат имеем, полагая $q = \exp\lambda t$, где значения λ определяются характеристическим уравнением $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_o{}^2 = 0$, которое имеет корни $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_o{}^2}$.

Естественно рассмотреть три случая.



1.2. *Затухающее колебание* $h < \omega_o$.

Корни $\lambda_{1,2} = -h \pm i\tilde{\omega}_o, \quad \tilde{\omega}_o = \sqrt{\omega_o{}^2 - h^2}$ комплексно сопряжены. Общее решение имеет вид

$$q(t) = \exp(-ht)[C_1\cos\sqrt{\omega_o{}^2 - h^2}\,t + C_2\sin\sqrt{\omega_o{}^2 - h^2}\,t],$$

где $$C_1 = q(0), \qquad C_2 = \frac{hq(0) + \dot{q}(0)}{\sqrt{\omega_o{}^2 - h^2}},$$

либо $$q(t) = \exp(-ht)A\sin\left(\sqrt{\omega_o{}^2 - h^2}\,t + \alpha\right), \qquad (2)$$

где $$A=\sqrt{q(0)^2+\frac{\left[hq(0)+\dot q(0)\right]^2}{\omega_o^{\,2}-h^2}},\quad tg\alpha=\frac{q(0)\sqrt{\omega_o^{\,2}-h^2}}{hq(0)+\dot q(0)}.$$

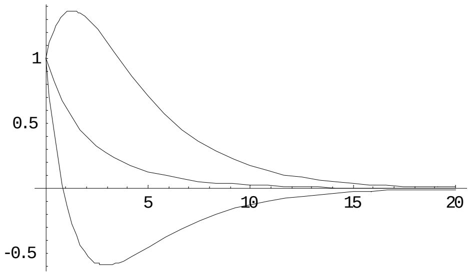
Амплитуды максимальных отклонений от положения равновесия образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\eta=\frac{a_{i+1}}{a_i}=\exp\left(-h\frac{T}{2}\right)=\exp\left(-\frac{h\,\pi}{\sqrt{\omega_o^{\,2}-h^2}}\right).$$

1.3. *Апериодическое движение* $h>\omega_o$. При большом сопротивлении решение имеет вид $q(t)=\exp(-ht)\left(C_1ch\sqrt{h^2-\omega_o^{\,2}}\,t+C_2sh\sqrt{h^2-\omega_o^{\,2}}\,t\right)$,

где $C_1=q(0)$, $C_2=\dfrac{\dot q(0)+hq(0)}{\sqrt{h^2-\omega_o^{\,2}}}$, либо

$$q(t)=\exp(-ht)A\;sh\left(\sqrt{h^2-\omega_o^{\,2}}\,t+\alpha\right),\tag{3}$$

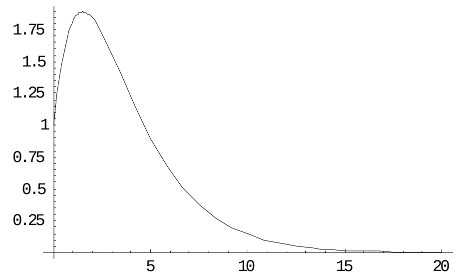


где $$A=\sqrt{q(0)^2+\frac{\left(\dot q(0)+hq(0)\right)^2}{h^2+\omega_o^{\,2}}},$$

$$th\alpha=\frac{q(0)\sqrt{h^2-\omega_o^{\,2}}}{\dot q(0)+hq(0)}.$$

1.4. *Предельное апериодическое движение* $h=\omega_o$.

Решение имеет вид
$q(t)=\exp(-ht)(A\,t+\alpha)$,
где $A=\dot q(0)+hq(0)$, $\alpha=q(0)$.



2. При наличии n степеней свободы имеем уравнения малых колебаний в виде $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=0$. Решение в виде $\mathbf{q}=\mathbf{U}\exp(\mu t)$ дает однородную систему уравнений $\left(\mathbf{A}\mu^2+\mathbf{B}\mu+\mathbf{C}\right)\mathbf{U}=0$ для определения вектора $\mathbf{U}$. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю: $\Delta(\mu)\equiv\det\left(\mathbf{A}\mu^2+\mathbf{B}\mu+\mathbf{C}\right)=0$. Это уравнение степени $2n$ называется вековым уравнением. Каждому значению μ_k, $k=\overline{1,2n}$ соответствует вектор $\mathbf{U}_k$, $k=\overline{1,2n}$. Общее решение – линейная суперпозиция частных решений

$$\mathbf{q}=\sum_{k=1}^{2n}C_k\mathbf{U}_k\exp(\mu_k t).$$

Если вещественные части корней отрицательны $\operatorname{Re}\mu_k<0$, $k=\overline{1,2n}$, то положение равновесия исходной системы асимптотически устойчиво. Если $\mathbf{B}=0$, а $\mathbf{A,C}$ – симметричные положительно определенные квадратичные формы, то $\mu_k=\pm i\sqrt{\lambda_k}$, $k=\overline{1,2n}$.

Выводы, полученные при анализе осциллятора с вязким трением, остаются справедливыми и для системы с n степенями свободы.

Для любой пары комплексно сопряженных корней имеем

$\mathbf{U}^T\left(\mathbf{A}\mu^2+\mathbf{B}\mu+\mathbf{C}\right)\mathbf{U}^* = A\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)\mu^2+B\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)\mu+C\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)=0$, где $A\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)>0,\quad B\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)>0,\quad C\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)>0$ и следовательно $\operatorname{Re}\mu<0$.

Кроме того, $2\operatorname{Re}\mu=\mu+\mu^*=-\dfrac{B\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)}{A\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)}<0,\quad |\mu|^2=\mu\mu^*=\dfrac{C\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)}{A\left(\mathbf{U},\mathbf{U}^*\right)}$ и соответствующие два слагаемых в общем решении приводятся к вещественному виду:

$$C\mathbf{U}\exp(\mu t)+C^*\mathbf{U}^*\exp\left(\mu^*t\right)=\frac{1}{2}(F+iG)(\mathbf{V}+i\mathbf{W})\exp[(\alpha+i\beta)t]+$$
$$+\frac{1}{2}(F-iG)(\mathbf{V}-i\mathbf{W})\exp[(\alpha-i\beta)t]=$$
$$=\frac{1}{2}\exp(\alpha t)(\mathbf{V}+i\mathbf{W})[(F\cos\beta t-G\sin\beta t)+i(G\cos\beta t+F\sin\beta t)]+$$
$$+\frac{1}{2}\exp(\alpha t)(\mathbf{V}-i\mathbf{W})[(F\cos\beta t-G\sin\beta t)-i(G\cos\beta t+F\sin\beta t)]=$$
$$=\exp(\alpha t)[\mathbf{V}(F\cos\beta t-G\sin\beta t)-\mathbf{W}(G\cos\beta t+F\sin\beta t)]=$$
$$=\exp(\alpha t)[\mathbf{V}A\cos(\beta t+\alpha)-\mathbf{W}A\sin(\beta t+\alpha)]$$

Если векторы $\mathbf{U},\mathbf{V}$ соответствуют вещественным корням μ,ν, то

$$\mathbf{V}^T\left(\mathbf{A}\mu^2+\mathbf{B}\mu+\mathbf{C}\right)\mathbf{U}=A(\mathbf{V},\mathbf{U})\mu^2+B(\mathbf{V},\mathbf{U})\mu+C(\mathbf{V},\mathbf{U})=0,$$
$$\mathbf{U}^T\left(\mathbf{A}\nu^2+\mathbf{B}\nu+\mathbf{C}\right)\mathbf{V}=A(\mathbf{U},\mathbf{V})\nu^2+B(\mathbf{U},\mathbf{V})\nu+C(\mathbf{U},\mathbf{V})=0,$$

Оба корня удовлетворяют одному уравнению и поэтому

$$\mu+\nu=-\frac{B(\mathbf{U},\mathbf{V})}{A(\mathbf{U},\mathbf{V})}<0,\quad \mu\nu=\frac{C(\mathbf{U},\mathbf{V})}{A(\mathbf{U},\mathbf{V})}.$$

3. Рассмотрим движение консервативной системы в ε окрестности ее положения равновесия под действием сил $Q_i(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}D_{ij}F_j(t),\quad i=\overline{1,n}$.

Преобразуем эти силы к нормальным координатам. Из выражения элементарной работы $\delta A=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(t)\delta q_i=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(t)U_{i\nu}\delta\theta_\nu=\sum\limits_{\nu}^{n}\Theta_\nu(t)\delta\theta_\nu$.

имеем $\Theta_\nu(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(t)U_{i\nu}=\sum\limits_{ij=1}^{n\infty}D_{ij}U_{i\nu}F_j(t)$. Линейность системы позволяет рассматривать реакцию нормальных координат только на элементарное возмущение $\sum\limits_{i=1}^{n}D_{ij}U_{i\nu}F_j(t)$. Итак, решению подлежат уравнения

$$\ddot{\theta}_\nu+\omega_\nu{}^2\theta_\nu=\sum_{i=1}^{n}D_{ij}U_{i\nu}F_j(t),\quad \nu=\overline{1,n}.$$

Если $\sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} = 0$, имеем свободные колебания

$$\theta_\nu(t) = \theta_\nu(0)\cos\omega_\nu t + \frac{\dot\theta_\nu(0)}{\omega_\nu}\sin\omega_\nu t,$$

если $\sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} \neq 0$, на свободные колебания накладывается вынужденное движение

$$\theta_\nu(t) = \theta_\nu(0)\cos\omega_\nu t + \frac{\dot\theta_\nu(0)}{\omega_\nu}\sin\omega_\nu t + \frac{1}{\omega_\nu}\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\sin[\omega_\nu(t-\tau)]d\tau.$$

Если начальные отклонения равны нулю, имеем только вынужденное движение

$$\theta_\nu^*(t) = \frac{1}{\omega_\nu}\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\sin[\omega_\nu(t-\tau)]d\tau.$$

В этом выражении подынтегральная функция и верхний предел интеграла есть функции времени t, поэтому

$$\dot\theta_\nu^*(t) = \frac{1}{\omega_j}\sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\sin\left[\omega_j(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=t} +$$

$$+\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\cos\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]d\tau = \int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\cos\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]d\tau,$$

$$\ddot\theta_\nu^*(t) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\cos\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=t} - \omega_\nu\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\sin\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau) - \omega_\nu\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(\tau)\sin\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]d\tau$$

и

$$\ddot\theta_\nu^* + \omega_\nu{}^2\theta_\nu^* = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(t).$$

Таким образом, осуществлена непосредственная проверка решения, описывающего вынужденное движение.

4. Частные случаи вынужденного движения.

4.1. К покоящейся системе в момент $t = 0$ прикладываются силы, сохраняющие при $t > 0$ постоянные значения $F_j(t) = F_j = const$. Из общего решения имеем

$$\theta_\nu(t) = \frac{1}{\omega_\nu}\int_o^t \sum_{i=1}^{n} U_{i\nu} D_{ij} F_j(t)\sin[\omega_\nu(t-\tau)]d\tau = \frac{1}{\omega_\nu{}^2}\sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j(1-\cos\omega_\nu t).$$

4.2. В начальный момент покоящаяся система испытывает удар, то есть на систему действуют силы $F_j(t) = \begin{cases} F_j/\alpha, & 0 < t < \alpha, \quad F_j = const, \\ 0, & \alpha < t, \quad \alpha \to 0. \end{cases}$

Решение, полученное выше, для момента времени $t = \alpha \to 0$ дает

$$\theta_\nu(\alpha) = \frac{1}{\omega_\nu{}^2}\sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu}\frac{F_j}{\alpha}(1 - \cos\omega_\nu\alpha) \approx \sum_{i=1}^{n} D_{ij} U_{i\nu} F_j\frac{\alpha}{2} \to 0,$$

$$\dot{\theta}_{\nu}(\alpha)=\frac{1}{\omega_{\nu}}\sum_{i=1}^{n}D_{ij}U_{i\nu}\frac{F_j}{\alpha}\sin\omega_{\nu}\alpha\approx\sum_{i=1}^{n}D_{ij}U_{i\nu}F_j\neq 0 .$$

Итак, за короткий промежуток времени хотя бы одна из ее скоростей изменяется на конечную величину. Последующее свободное движение происходит по закону $\theta_{\nu}(t)=\dfrac{\dot{\theta}_{\nu}(0)}{\omega_{\nu}}\sin\omega_{\nu}t$.

4.3. Вынужденные колебания при действии синусоидальной силы $F_{\alpha}(t)=FS_{\alpha}\sin\omega_{\alpha}t+FC_{\alpha}\cos\omega_{\alpha}t$, где $\omega_{\alpha}\neq\omega_{\nu}$ имеют вид

$$\theta_{\nu}^{*}(t)=\frac{1}{\omega_{\nu}}\int_{o}^{t}\sum_{i=1}^{n}D_{i\alpha}U_{i\nu}(FS_{\alpha}\sin\omega_{\alpha}\tau+FC_{\alpha}\cos\omega_{\alpha}\tau)\sin[\omega_{\nu}(t-\tau)]d\tau=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}D_{i\alpha}\frac{U_{i\nu}}{\omega_{\nu}(\omega_{\nu}^{2}-\omega_{\alpha}^{2})}\left(FS_{\alpha}\omega_{\alpha}\sin\omega_{\nu}t+FC_{\alpha}\omega_{\nu}\cos\omega_{\nu}t\right)-$$

$$+\sum_{i=1}^{n}D_{i\alpha}\frac{U_{i\nu}}{(\omega_{\nu}^{2}-\omega_{\alpha}^{2})}\left(FS_{\alpha}\sin\omega_{\alpha}t+FC_{\alpha}\cos\omega_{\alpha}t\right).$$

В исходных переменных имеем $q_{j}^{*}(t)=\sum_{i=1}^{n}D_{i\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{U_{j\nu}U_{i\nu}}{(\omega_{\nu}^{2}-\omega_{\alpha}^{2})}*$.

$$*\left[FS_{\alpha}\left(\sin\omega_{\alpha}t-\frac{\omega_{\alpha}}{\omega_{\nu}}\sin\omega_{\nu}t\right)+FC_{\alpha}\left(\cos\omega_{\alpha}t-\cos\omega_{\nu}t\right)\right].$$

Множитель $\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{U_{j\nu}U_{i\nu}}{\omega_{\nu}^{2}-\omega_{\alpha}^{2}}=W_{ij}$ называется амплитудно-фазовой характеристикой.

Пример. Для консервативной системы с частотами

$$\omega_1^2=0,\quad \omega_2^2=1.382,\quad \omega_3^2=1.382,\quad \omega_4^2=3.618,\quad \omega_4^2=3.618$$

и соответствующими амплитудными векторами

$U_{11}=-0.447,\quad U_{12}=\ \ 0,\quad U_{13}=\ \ 0.6325,\quad U_{14}=\ \ 0,\quad U_{15}=\ \ 0.6325,$

$U_{21}=-0.447,\quad U_{22}=-0.6015,\quad U_{23}=\ \ 0.1955,\quad U_{24}=-0.372,\quad U_{25}=-0.512,$

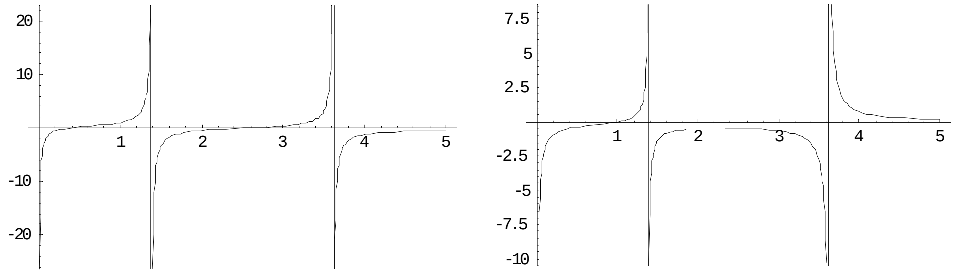
$U_{31}=-0.447,\quad U_{32}=-0.372,\quad U_{33}=-0.512,\quad U_{34}=\ \ 0.6015,\quad U_{35}=\ \ 0.1955,$

$U_{41}=-0.447,\quad U_{42}=\ \ 0.372,\quad U_{43}=-0.512,\quad U_{44}=-0.6015,\quad U_{45}=\ \ 0.1955,$

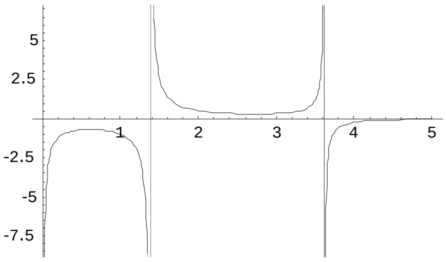
$U_{51}=-0.447,\quad U_{52}=\ \ 0.6015,\quad U_{23}=\ \ 0.1955,\quad U_{54}=\ \ 0.372,\quad U_{55}=-0.512,$

построены амплитудно-фазовые характеристики $W_{1j}(\omega)$

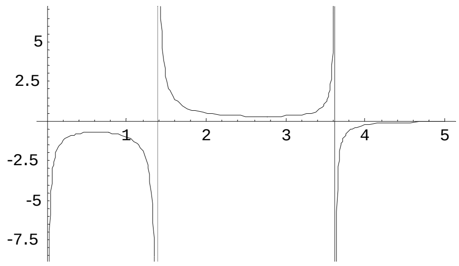
$W_{11}(\omega)$ $W_{12}(\omega)$



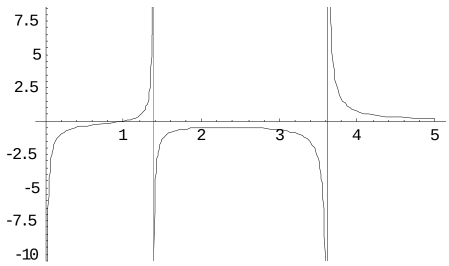
$W_{13}(\omega)$



$W_{14}(\omega)$



$W_{15}(\omega)$



4.4. Вынужденные колебания при действии синусоидальной силы $F_\alpha(t) = FS_\alpha \sin\omega_\nu t + FC_\alpha \cos\omega_\nu t$, где ω_ν - одна из собственных частот имеют вид

$$\theta_\nu^*(t) = \frac{1}{\omega_\nu}\int_o^t \sum_{i=1}^{n} D_{i\alpha} U_{i\nu}\left(FS_\alpha \sin\omega_\nu \tau + FC_\alpha \cos\omega_\nu \tau\right)\sin\left[\omega_\nu(t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_{i\alpha} U_{i\nu}\,\frac{1}{2\omega_\nu^{\,2}}\left[\left(\omega_\nu t FC_\alpha + FS_\alpha\right)\sin\omega_\nu t - \omega_\nu t FS_\alpha \cos\omega_\nu t\right].$$

В исходных переменных имеем

$$q_j^*(t) = \sum_{i=1}^{n} D_{i\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{U_{j\nu} U_{i\nu}}{2\omega_\nu^{\,2}}\left[\left(\omega_\nu t FC_\alpha + FS_\alpha\right)\sin\omega_\nu t - \omega_\nu t FS_\alpha \cos\omega_\nu t\right].$$

5. *Вынужденное движение осциллятора* при нулевых начальных условиях под действием силы $F(t)$ в случае малого вязкого трения $h < \omega_o$ имеет вид

$$q^*(t) = \int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau\,.$$

Убедимся в этом. Вычислим первую и вторую производные этого выражения

$$\dot q^*(t) = \int_0^t F(\tau)\exp[-h(t-\tau)]\cos\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau -$$

$$- h\int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau,$$

$$\ddot{q}^*(t) = F(t) - h\int_0^t F(\tau)\exp[-h(t-\tau)]\cos\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau -$$

$$-\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\int_0^t F(\tau)\exp[-h(t-\tau)]\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau +$$

$$+h^2\int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau -$$

$$-h\int_0^t F(\tau)\exp[-h(t-\tau)\cos\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau.$$

Подставляя выражения для $q^*, \dot{q}^*, \ddot{q}^*$ в исходное уравнение, получаем

$$\ddot{q}^* + 2h\dot{q}^* + \omega_o^{\,2} q^* = F\,.$$

Общее решение есть объединение свободного движения с вынужденным:

$$q(t) = \exp(-ht)\left[q(0)\cos\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,t + \frac{hq(0) + \dot{q}(0)}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,t\right] +$$

$$+\int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau\ . \qquad (*)$$

Заменяя в этом выражении $\cos\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,t,\ \ \sin\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,t,\ \ \sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}$, соответственно на $ch\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}\,t,\ \ sh\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}\,t,\ \ \sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}$ получаем общее решение в виде апериодического движения $h > \omega_o$:

$$q(t) = \exp(-ht)\left[q(0)ch\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}\,t + \frac{hq(0) + \dot{q}(0)}{\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}}sh\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}\,t\right] +$$

$$+\int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}}sh\left[\sqrt{h^2 - \omega_o^{\,2}}\,(t-\tau)\right]d\tau\ . \qquad (**)$$

В предельном случае $h = \omega_o$

$$q(t) = \exp(-h\,t)\{q(0) + [\dot{q}(0) + hq(0)]t\} +$$

$$+\int_0^t F(\tau)(t-\tau)\exp[-h(t-\tau)]\,d\tau, \qquad (***)$$

5.1. Представляет интерес отклик осциллятора с трением на экспоненциальное возмущение $F(t) = F_o\exp(\alpha\,t)$:

$$q^*(t) = \int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}}\sin\left[\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,(t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{F_o\exp(\alpha\,t)}{\alpha^2 + 2\alpha\,h + \omega_o^{\,2}} - \frac{F_o\exp(-h\,t)\sin\left(\sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\,t + \varphi\right)}{\sqrt{(\omega_o^{\,2} - h^2)(\alpha^2 + 2\alpha\,h + \omega_o^{\,2})}},$$

где $tg\varphi = \sqrt{\omega_o^{\,2} - h^2}\Big/(\alpha + h)$;

$$q^*(t)=\int_0^t F(\tau)\frac{\exp[-h(t-\tau)]}{\sqrt{h^2-\omega_o^2}}sh\left[\sqrt{h^2-\omega_o^2}(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{F_o\exp(\alpha\, t)}{\alpha^2+2\alpha\, h+\omega_o^2}-\frac{F_o\exp(-h\, t)sh\left(\sqrt{h^2-\omega_o^2}\,t+\varphi\right)}{\sqrt{\left(h^2-\omega_o^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\, h+\omega_o^2\right)}},$$

где $\quad th\varphi=\sqrt{h^2-\omega_o^2}\Big/(\alpha+h);$

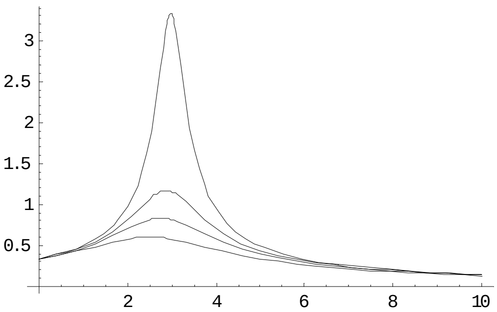
$$q^*(t)=\int_0^t F(\tau)(t-\tau)\exp[-h(t-\tau)]\,d\tau=$$

$$=\frac{F_o\exp(\alpha\, t)}{(\alpha+h)^2}-\frac{F_o\exp(-ht)[(\alpha+h)t-1]}{(\alpha+h)^2}.$$

Во всех трех случаях вынужденное движение состоит из двух слагаемых. Второе слагаемое представляет собой затухающее свободное движение, возникающее при наличии возмущения. Первое слагаемое - смещение пропорциональное вынуждающей силе. Коэффициент пропорциональности называют амплитудно-фазовой характеристикой.

При $\alpha=i\omega$ имеем $W(\omega)=\left(\omega_o^2-\omega^2+i2h\omega\right)^{-1}=R(\omega)\exp[i\psi(\omega)]$,

где $\quad R(\omega)=1\Big/\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4h^2\omega^2}\,,\quad tg\psi(\omega)=-\dfrac{h\omega}{\omega_o^2-\omega^2}.$



Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой отклик системы на гармоническое возмущение $\exp(i\omega t)$. Вынужденное колебание получается умножением амплитуды силы на значение амплитудной характеристики, а отставание фазы вынужденного колебания от фазы силы равно значению фазы фазовой характеристике.

При больших значениях частот имеем $\lim\limits_{\omega\to\infty}R(\omega)=0$. В таком смысле любая механическая система является фильтром высоких частот.

Максимальное значение амплитуды колебаний установившегося режима получается при частоте $\quad \omega_{\max}^2=\omega_o^2-2h^2$, отличающейся от собственной частоты $\tilde{\omega}^2=\omega_o^2-h^2$, $\quad R(\omega_{\max})=1/2h\tilde{\omega}$.

Фаза $\psi(\omega)$ с изменением частоты монотонно меняется от нуля до $-\pi$.

С уменьшением h в пределе получаем амплитудно-фазовую характеристику осциллятора $\quad R(\omega)\to\dfrac{1}{\omega_o^2-\omega^2},\qquad \psi(\omega)\to\begin{cases}0 & \omega<\omega_o,\\ -\pi & \omega>\omega_o.\end{cases}$

Амплитудно-фазовая характеристика консервативной системы получается как суперпозиция амплитудно-фазовых характеристик нормальных координат.

Для склерономной системы получаем отклик $j-$ой координаты на возмущение $\exp(i\omega t)$ в $k-$ом уравнении как решением системы уравнений $\left(-\mathbf{A}\omega^2+i\mathbf{B}\omega+\mathbf{C}\right)\mathbf{W}=\mathbf{E} \quad \rightarrow \quad W_{kj}(\omega)=\dfrac{\Delta_{kj}(\omega)}{\Delta(\omega)}=R_{kj}(\omega)\exp\left[i\psi_{kj}(\omega)\right].$

Комфортное пребывание в экипаже любого назначения достигается подбором рессор с нужной характеристикой. Настройка станка и выбор режима его работы имеет своей целью получить на выходе минимум колебаний, что повышает точность изделия и чистоту его поверхности, от которых в свою очередь зависит надежность и долговечность работы всего устройства.