

## Лекция 2.4

### Малые колебания консервативной системы

**1.** Факт устойчивости положения равновесия позволяет сохранить в уравнениях динамики только линейные члены относительно отклонений и скоростей, отбросив члены более высокого порядка.

Будем считать, что уравнения динамики консервативной системы, совершающей движение около устойчивого положения равновесия, составляются методом Лагранжа. Положение равновесия примем за начало координат  $q_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и значение потенциальной энергии в положении равновесия примем равным нулю.

Оператор Лагранжа  $L_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}$  является дифференциальным

оператором первого порядка. Поэтому линеаризация уравнений динамики состоит в удержании квадратичных членов относительно  $\dot{q}_i$  и  $q_i$  в кинетической и потенциальной энергии.

$$2T = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij=1}^n \left[ a_{ij}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \Big|_{q=0} q_k + \dots \right] \dot{q}_i \dot{q}_j \approx \sum_{ij=1}^n a_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$P = P(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_i} \Big|_{q=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0} q_i q_j + \dots \approx \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n c_{ij} q_i q_j.$$

Здесь  $P(0) = 0$  и  $Q_i(0) = - \frac{\partial P}{\partial q_i} \Big|_{q=0} = 0$ . В положении равновесия равны нулю

обобщенные силы.

Малая окрестность положения равновесия представляет собой область  $n$ -мерного евклидова пространства, и кинетическая энергия

$$2T = \mathbf{V}^2 = \sum_{ij=1}^n \mathbf{e}_i \dot{q}_i \mathbf{e}_j \dot{q}_j = \sum_{ij=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \geq 0$$

есть положительно определенная квадратичная форма скоростей.

В соответствии с теоремой Лагранжа об устойчивости потенциальная энергия в положении равновесия имеет строгий минимум, то есть

$$2P = \sum_{ij=1}^n c_{ij} q_i q_j = \sum_{v=1}^n \omega_v^2 \theta_v^2 \geq 0$$

- положительно определенная квадратичная форма координат.

**2.** При некоторых значениях  $\omega^2 = \lambda$  уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - P)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - P)}{\partial q_i} = \sum_{ij=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} q_j) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

допускают частное решение вида  $q_j = U_j \sin(\omega t + \alpha)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $U_j \neq 0$ . Подставляя эти решения в уравнения динамики, получаем алгебраическую систему для

определения коэффициентов  $U_j$ :  $\sum_{ij=1}^n (c_{ij} - \lambda a_{ij}) U_j = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Отличное от

нуля решение имеет место при условии  $\det(c_{ij} - \lambda a_{ij}) = 0$ . Это уравнение, называемое вековым или частотным, имеет  $n$  корней  $\omega_v = \sqrt{\lambda_v}$ . Каждому значению корня  $\lambda_v$  соответствует набор коэффициентов  $U_{jv}$ ,  $j = \overline{1, n}$  - амплитудный вектор.

Итак, общее решение однородной системы - линейная суперпозиция частных решений - имеет вид  $q_i = \sum_{v=1}^n A_v U_{iv} \sin(\omega_v t + \alpha_v)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

3. Обоснование изложенного состоит в том, что две квадратичные формы, из которых хотя бы одна является положительно определенной, всегда можно одним и тем же неособенным преобразованием

$q_i = \sum_{v=1}^n U_{iv} \theta_v$ ,  $\det U_{iv} \neq 0$  привести к сумме квадратов:

$$\begin{aligned} 2T &= \mathbf{V}^2 = \sum_{ij=1}^n \mathbf{e}_i \dot{q}_i \mathbf{e}_j \dot{q}_j = \sum_{ij=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij=1}^n \sum_{\nu\mu=1}^n a_{ij} U_{iv} U_{j\mu} \dot{\theta}_\nu \dot{\theta}_\mu = \\ &= \sum_{\nu\mu=1}^n \sum_{ij=1}^n \mathbf{e}_i U_{iv} \mathbf{e}_j U_{j\mu} \dot{\theta}_\nu \dot{\theta}_\mu = \sum_{\nu\mu=1}^n \mathbf{U}_\nu \mathbf{U}_\mu \dot{\theta}_\nu \dot{\theta}_\mu = \sum_{\nu\mu=1}^n \delta_{\nu\mu} \dot{\theta}_\nu \dot{\theta}_\mu, \\ 2\Pi &= \sum_{ij=1}^n c_{ij} q_i q_j = \sum_{ij=1}^n \sum_{\nu\mu=1}^n c_{ij} U_{iv} U_{j\mu} \theta_\nu \theta_\mu = \sum_{\nu\mu}^n \delta_{\nu\mu} \omega_\nu \omega_\mu \theta_\nu \theta_\mu. \end{aligned}$$

При этом все  $\omega_\nu^2 = \lambda_\nu > 0$ , так как форма  $2\Pi$  также положительно определена. Обсуждаемое неособенное преобразование есть переход от базиса  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}$  к базису  $\mathbf{U}_\nu$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{U}_\nu \cdot \mathbf{U}_\mu = \delta_{\nu\mu}$ :

$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \dot{q}_i = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i U_{iv} \dot{\theta}_v = \sum_{v=1}^n \mathbf{U}_v \dot{\theta}_v$ . При этом поверхность второго порядка

$2\Pi$  принимает свой канонический вид  $2\Pi = \sum_{ij=1}^n c_{ij} q_i q_j = \sum_{v=1}^n \omega_v^2 \theta_v^2 \geq 0$ .

В нормальных, главных координатах  $\theta_v$  уравнения разделяются  $\ddot{\theta}_v + \omega_v^2 \theta_v = 0$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ , а это означает, что начальные условия могут быть подобраны таким образом, что реализуется только одно какое-либо главное движение, то есть все координаты  $q_i = U_{iv} \theta_v$ ,  $i = \overline{1, n}$  меняются по одному закону  $\theta_v$ , но с разными амплитудами  $U_{iv}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так реализуется частное решение.

Отметим, что частоты главных движений могут быть кратными, а для линейной системы и равны нулю. Главное движение, соответствующее нулевой частоте, имеет вид  $\theta_v = A_v t + \alpha_v$ . Ортогональность амплитудных векторов при этом не нарушается.

Изложенное выше согласуется с правилом построения общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Частное решение в виде экспоненты  $q_j = U_j e^{\mu t}$ ,  $U_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, n}$  имеет место при условии  $\det(c_{ij} + \mu^2 a_{ij}) = 0$ .

Корни этого уравнения мнимо сопряженные  $\mu_v = \sqrt{-\lambda_v} = \pm i\omega_v$ . Наличие вещественной части у этих корней означало бы изменение полной энергии рассматриваемой консервативной системы  $2H = \sum_{v=1}^n h_v$ ,  $h_v = \text{const}$ .

Рассматриваемые частные решения в виде синусоид объединяют пары экспонент с мнимо сопряженными показателями. Каждая частота, равная нулю, порождает нулевой корень кратности два, которому соответствует частное решение в виде многочлена степени один.

$$\text{В матричном виде имеем } A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = \sum_{v=1}^n \mathbf{U}_v \theta_v,$$

$$\mathbf{U}_\mu^T A \mathbf{U}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \mathbf{U}_\mu^T C \mathbf{U}_\nu = \delta_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu,$$

$$\mathbf{U}_\mu^T A \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}_\mu^T C \mathbf{q} = \sum_{v=1}^n \mathbf{U}_\mu^T A \mathbf{U}_v \ddot{\theta}_v + \sum_{v=1}^n \mathbf{U}_\mu^T C \mathbf{U}_v \theta_v = \ddot{\theta}_\mu + \omega_\mu^2 \theta_\mu = 0.$$

4. Легко проверяются следующие свойства формы  $A(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U}^T A \mathbf{V}$ .

- $A(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2, \mathbf{V}) = A(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}) + A(\mathbf{U}_2, \mathbf{V})$ ,
- $A(\lambda \mathbf{U}, \mathbf{V}) = \lambda A(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ ,  $\lambda$  – скаляр,
- $A(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = A(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ ,
- $A(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) = A(\mathbf{V} + i\mathbf{W}, \mathbf{V} - i\mathbf{W}) =$   
 $= A(\mathbf{V}, \mathbf{V}) - iA(\mathbf{V}, \mathbf{W}) + iA(\mathbf{W}, \mathbf{V}) + A(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = A(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + A(\mathbf{W}, \mathbf{W})$ ,
- $A(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) > 0$ , если  $\mathbf{U} = \mathbf{V} + i\mathbf{W} \neq 0$ , то  $\mathbf{U} \neq 0$  либо  $\mathbf{V} \neq 0$ ,
- $(\lambda A - C)\mathbf{U} = 0 \rightarrow \lambda A(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = C(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ ,
- $(\lambda_v A - C)\mathbf{U} = 0, (\lambda_v A - C)\mathbf{V} = 0 \rightarrow$   
 $(\lambda_v - \lambda_v)A(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0 \rightarrow A(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$ .

Амплитудные векторы, соответствующие различным собственным значениям ортогональны в метрике кинетической энергии.

$$\mathbf{k}. \quad A(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = A(\mathbf{V}, \mathbf{U}) > 0, \quad C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = C(\mathbf{V}, \mathbf{U}) > 0 \rightarrow \lambda > 0.$$

Из симметричности матриц  $A, C$  следует вещественность корней. Векторы, соответствующие комплексно-сопряженным корням, ортогональны  $A(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) = 0$ , что противоречит условию  $A(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) > 0$ , комплексно-сопряженных корней нет,  $\lambda = C(\mathbf{U}, \mathbf{U})/A(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$ .

$$\mathbf{l}. \quad A\left(\mathbf{U}_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{U}_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k A(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_k) = \alpha_j A(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_j) = 0 \rightarrow \alpha_j = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{U}_k = 0 \rightarrow \alpha_k = 0. \quad \text{Амплитудные векторы независимы.}$$

$$\mathbf{m}. \quad \text{Если } \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{n-1} \leq \omega_n, \quad \text{то}$$

$$\omega_1^2 \leq \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2 + \dots + \omega_{n-1}^2 \theta_{n-1}^2 + \omega_n^2 \theta_n^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{n-1}^2 + \theta_n^2} = \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \leq \omega_n^2,$$

$$\omega_1^2 = \min \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}, \quad \omega_n^2 = \max \frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

**n.** Если  $\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = A(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ ,  $\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq C(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  либо  
 $\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \leq A(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ ,  $\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ , то  
 $\frac{C(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \leq \frac{\tilde{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \rightarrow \omega_j \leq \tilde{\omega}_j, \quad j = \overline{1, n}.$

**Теорема Релея** При увеличении жесткости системы или уменьшении ее инерции главные частоты увеличиваются.

**o.** Рассмотрим влияние связей на частоты системы.

Из уравнения связи  $\sum_{k=1}^n A_k \theta_k = 0$  имеем  $\theta_n = -\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n-1} A_k \theta_k$ ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\theta}_k^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n-1} A_k \dot{\theta}_k \right)^2 \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k^2 \theta_k^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_n}{A_n} \sum_{k=1}^{n-1} A_k \theta_k \right)^2.$$

Уравнения динамики  $\ddot{\theta}_v + \omega_v^2 \theta_v + \mu A_v = 0, \quad v = \overline{1, n-1}, \quad (*)$

где  $\mu = \frac{1}{A_n^2} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\ddot{\theta}_k + \omega_n^2 \theta_k) = -\frac{1}{A_n} (\ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n) \rightarrow \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n + \mu A_n = 0.$

Для какого-либо главного движения

$$\theta_v = U_v \sin \omega t, \quad (\omega_v^2 - \omega^2) U_v + U A_v = 0, \quad v = \overline{1, n}, \quad \mu = U \sin \omega t$$

уравнение связи дает  $\sum_{k=1}^n A_k U_k = -\sum_{k=1}^n U \frac{A_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2} = 0.$

Это уравнение, определяющее  $\omega$ , имеет  $n-1$  корней, которые лежат в интервалах между значениями  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n$ .

Известно, что наличие трещины в стакане определяют его постукиванием. Глухой звук говорит о наличии трещины. Стакан без трещины по сравнению со стаканом с трещиной есть система с дополнительной связью. Постукивание возбуждает низкие частоты, а наличие связи повышает низкую частоту. Звук целого стакана более высокий. Точно так же поступают обходчики железнодорожных путей и осмотрщики подвижного состава, обстукивая рельсы и колесные пары.

**5.** Свойство ортогональности амплитудных векторов позволяет понизить порядок системы. Пусть из каких-либо соображений можно указать компоненты амплитудного вектора, например, с номером  $n$ , то есть  $q_i = U_{in} \theta_n, \quad i = \overline{1, n}$ .

Кинетическая и потенциальная энергии имеют вид  $2T = a \dot{\theta}_n^2, \quad 2\Pi = c \theta_n^2$ , где

$$a = \sum_{ij=1}^n a_{ij} U_{in} U_{jn}, \quad c = \sum_{ij=1}^n c_{ij} U_{in} U_{jn} \quad \text{и} \quad a \ddot{\theta}_n + c \theta_n = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{c}{a}.$$

Поскольку при отсутствии возмущений консервативная система совершает только главные

движения, то все они ортогональны известному, то есть

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij} U_{in} q_j = \sum_{ij=1}^{n-1} a_{ij} U_{in} q_j + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} U_{in} q_n + a_{nn} U_{nn} q_n = 0.$$

Из этого условия  $q_n = -\sum_{j=1}^{n-1} l_j q_j$ , где  $l_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} U_{in} / \left( \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} U_{in} + \sum_{i=1}^n a_{in} U_{in} \right)$ .

Подставляя это выражение для  $q_n$  в кинетическую и потенциальную энергии,

$$\begin{aligned} \text{получаем} \quad 2T &= \sum_{ij=1}^{n-1} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - 2 \sum_{ij=1}^{n-1} a_{in} l_j \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{ij=1}^{n-1} a_{nn} l_i l_j \dot{q}_i \dot{q}_j, \\ 2\Pi &= \sum_{ij=1}^{n-1} c_{ij} q_i q_j - 2 \sum_{ij=1}^{n-1} c_{in} l_j q_i q_j + \sum_{ij=1}^{n-1} c_{nn} l_i l_j q_i q_j. \end{aligned}$$

Выражение для  $q_n$  можно подставить также в исходную систему уравнений.

**6.** Свойство ортогональности амплитудных векторов позволяет также в явном виде выразить произвольные константы общего решения  $A_\nu$ ,  $\alpha_\nu$ ,  $\nu = 1, n$  через начальные условия  $q_i(0)$ ,  $\dot{q}_i(0)$ ,  $i = 1, n$ . Сначала выразим главные координаты через исходные

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij} q_i U_{j\nu} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{ij=1}^n a_{ij} U_{i\mu} U_{j\nu} \theta_\mu = \sum_{\mu=1}^n \delta_{\mu\nu} \theta_\mu = \theta_\nu. \quad \text{Отсюда имеем}$$

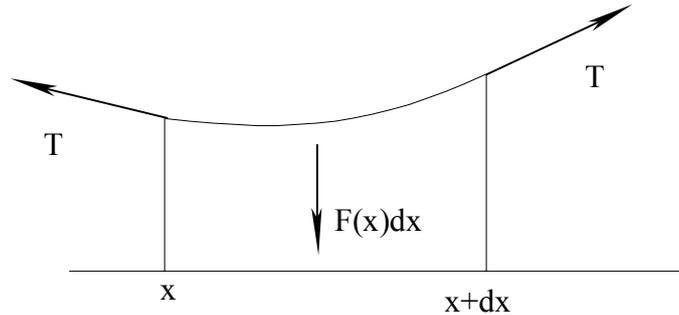
$$\theta_\nu(0) = A_\nu \sin \alpha_\nu = \sum_{ij}^n a_{ij} q_j(0) U_{j\nu}, \quad \dot{\theta}_\nu(0) = A_\nu \omega_\nu \cos \alpha_\nu = \sum_{ij}^n a_{ij} \dot{q}_j(0) U_{j\nu},$$

$$A_\nu = \sqrt{\theta_\nu(0)^2 + \frac{\dot{\theta}_\nu(0)^2}{\omega_\nu^2}}, \quad \text{tg } \alpha_\nu = \frac{\omega_\nu \theta_\nu(0)}{\dot{\theta}_\nu(0)}.$$

**7.** Метод приведения двух квадратичных форм к диагональному виду применим и в том случае, если помимо потенциальных сил имеют место линейные позиционные силы, матрица коэффициентов которых косо симметрична  $Q_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} q_j$ ,  $d_{ij} = -d_{ji}$ . Эти силы формально можно

объединить с потенциальными. Получающаяся при этом объединении матрица коэффициентов становится несимметричной, соответствующая поверхность второго порядка может оказаться не эллипсоидом, и корни характеристического уравнения не мнимо сопряженными.

**8.** Рассмотрим силы, действующие на элемент струны. Элемент  $dx$  струны находится в равновесии под действием сил натяжения  $T(\partial y / \partial x)_{x+dx}$ ,  $T(\partial y / \partial x)_x$  и силы  $F(x)dx$ , действующих на участок струны между точками  $x$  и  $dx$ . Проекция на ось  $y$  замкнутого треугольника, образованного этими силами,  $F(x)dx = T(dy/dx)_{x+dx} - T(dy/dx)_x$  преобразуется к виду  $F(x) = T(d^2 y / dx^2)$ .



Например, на единицу длины горизонтальной струны действует сила

$$F(x) = -\rho g \quad \text{и} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho g / T \quad \rightarrow \quad y = a + bx + \frac{\rho g}{2T} x^2.$$

Для граничных условий  $y(0) = 0$ ,  $y(L) = 0$  имеем  $y = \frac{\rho g}{2T} x(x - L)$ .

Форма - струны парабола, с приблизительно постоянной кривизной  $\rho g / T$  и наибольшим смещением в середине струны.

Полагая,  $F(x) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

описывающее поперечные колебания струны. Оно утверждает, что поперечное ускорение любого участка струны пропорционально кривизне этого участка.

Это уравнение допускает решение в виде синусоиды  $y = A(x) \sin(\omega t + \alpha)$ . Амплитудный множитель  $A(x)$  удовлетворяет уравнению

Гельмгольца  $\frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 A = 0$ , простейшим решением

которого является также синусоида  $A(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$ . Допустимое значение  $\omega$

определяется граничными условиями  $y(0) = 0$ ,  $y(L) = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{c} = k\pi$ ,

$k = 1, 2, \dots$  Итак, имеем стоячие волны  $y = A \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L} ct + \alpha\right)$ .

Замкнутая "струна", допускает решения в виде бегущих волн

$y = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A \sin\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$ . На длине струны  $L$  должно

уложиться целое количество волн :  $L = k\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Отождествив электроны атома, ответственные за рассеяние света, его преломление и дисперсию, со свободными гармоническими осцилляторами, Р.Ладенбург и Х.А.Крамерс получили в 1921 году следующий результат :

*при облучении атома световой волной, электрическое поле которой  $E \exp(2\pi i \nu t)$ , его электроны испускает вторичные волны той же частоты  $\nu$*

подобно электрическому осциллятору, электрический момент которого имеет амплитуду

$$P = \frac{c^3 E}{32\pi^4} \left\{ \sum_i \frac{A_i^1}{\nu_i^2 (\nu_i^2 - \nu^2)} - \sum_j \frac{A_i^j}{\nu_j^2 (\nu_j^2 - \nu^2)} \right\},$$

где  $A_i^1, A_i^j$  – вероятности за единицу времени спонтанного перехода атома из состояния с более высокой энергией  $E_i$  и из состояния с более низкой энергией  $E_j$  в состояние с энергией  $E_1$  и где  $\nu_i = \frac{E_i - E_1}{h}$ ,  $\nu_j = \frac{E_1 - E_j}{h}$ .

Таким образом, поведение атома при дисперсии можно описать множеством виртуальных (воображаемых) гармонических осцилляторов, названных А.Ланде *виртуальным оркестром*, который косвенным образом представляет собой квантовый излучатель.

Идея виртуального оркестра продемонстрировала возможность формулировки законов классической динамики в терминах величин, реально наблюдаемых в эксперименте.

В 1926 году началось развитие принципа де Бройля, согласно которому с любой частицей, имеющей энергию  $E$  и импульс  $p$ , связана волна, представляемая функцией  $\psi(x, t) = \exp[i(Et - px)/\hbar]$ . Стационарная часть

волновой функции  $\psi(x, t) = \psi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$  для частицы с энергией

$$E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + V(x) \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2} \psi.$$

В этом уравнении Шредингера просматривается уравнение Гельмгольца, в котором сделана замена  $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi E_T}{ch}\right)^2 = \left(\frac{E_T}{c\hbar}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2$ , то есть принято  $E_T = h\nu = cp$ .

Решение уравнения Шредингера должно быть однозначным, конечным и свободным от сингулярностей, даже при существовании сингулярностей у потенциала  $V(x)$ . Это имеет место только для некоторых особых значений  $E$ , которые называются собственными значениями.

Идея виртуального оркестра, как набора осцилляторов, трансформировалась в идею набора волн.

Дискретный спектр возникает примерно так. При отсутствии потенциального поля  $\psi = a \sin(kx + \alpha)$ ,  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ . Если частица зажата на отрезке  $[0, L]$  краевыми условиями  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ , то  $kL = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\text{что дает дискретный набор допустимой энергии } E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{nh}{2L}\right)^2.$$

Немного сложнее определяется дискретный спектр виртуального оркестра моделирующего атом водорода.

Квантовая механика, моделируя исследуемую систему волнами, определяет дискретные наборы энергии, допускаемые системой с заданным потенциалом.

9. Рассмотрим движение осциллятора при наличии трения Кулона.

Наличие постоянной силы в уравнении осциллятора эквивалентно смещению его положения равновесия

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = -F_o \operatorname{sign} \dot{q}.$$

Движение имеет место при достаточно больших отклонениях от положения равновесия  $\omega_o^2 |q| > F_o$ . Положим, что это условие выполнено, то есть

$q(0) > \frac{F_o}{\omega_o^2}$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ . Движение происходит в сторону уменьшения

отклонения  $q$ ,  $\operatorname{sign} \dot{q} = -1$  и уравнение имеет вид  $\ddot{q} + \omega_o^2 q = F_o$ .

Имеем колебание около смещенного положения равновесия

$$q(t) = \frac{F_o}{\omega_o^2} + \left[ q(0) - \frac{F_o}{\omega_o^2} \right] \cos \omega_o t,$$

$$\dot{q}(t) = -\omega_o \left[ q(0) - \frac{F_o}{\omega_o^2} \right] \sin \omega_o t.$$

Через пол периода скорость  $\dot{q}$  меняет знак, и уравнение принимает вид  $\ddot{q} + \omega_o^2 q = -F_o$ . В этот момент

$$q\left(\frac{\pi}{\omega_o}\right) = -q_o + \frac{2F_o}{\omega_o^2} > \frac{F_o}{\omega_o^2}, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Как и выше имеем колебание около нового положения равновесия

$$q(t) = -\frac{F_o}{\omega_o^2} + \left[ q\left(\frac{\pi}{\omega_o}\right) + \frac{F_o}{\omega_o^2} \right] \cos(\omega_o t - \pi) =$$

$$= -\frac{F_o}{\omega_o^2} + \left[ -q(0) + \frac{3F_o}{\omega_o^2} \right] \cos(\omega_o t - \pi),$$

$$\dot{q}(t) = -\omega_o \left[ -q(0) + \frac{3F_o}{\omega_o^2} \right] \sin(\omega_o t - \pi)$$

Еще через пол периода скорость  $\dot{q}$  снова меняет знак. В этот момент

$$q\left(\frac{2\pi}{\omega_o}\right) = q(0) - \frac{4F_o}{\omega_o^2} > \frac{F_o}{\omega_o^2}, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Система совершила одно полное колебание и далее процесс повторяется. Итак, максимальные по абсолютной величине последовательные отклонения будут:

$$q(0), \quad q\left(\frac{\pi}{\omega_o}\right) = -\left[ q(0) - \frac{2F_o}{\omega_o^2} \right], \quad q\left(\frac{2\pi}{\omega_o}\right) = \left[ q(0) - \frac{4F_o}{\omega_o^2} \right], \quad \dots$$

$$\dots, \quad q\left(\frac{n\pi}{\omega_o}\right) = (-1)^n \left[ q(0) - \frac{2nF_o}{\omega_o^2} \right], \dots \text{то есть отклонения уменьшаются в}$$

арифметической прогрессии на величину  $2F_o/\omega_o^2$  за полупериод. Движение

останавливается при условии  $q\left(\frac{n\pi}{\omega_o}\right) \leq \frac{F_o}{\omega_o^2}$ .

Построим фазовые траектории  $f(q, \dot{q})$ .

В течение первого и второго полупериодов имеем

$$\left[ q(t) - \frac{F_o}{\omega_o^2} \right]^2 + \left[ \frac{\dot{q}(t)}{\omega_o} \right]^2 = \left[ q(0) - \frac{F_o}{\omega_o^2} \right]^2,$$

$$\left[ q(t) + \frac{F_o}{\omega_o^2} \right]^2 + \left[ \frac{\dot{q}(t)}{\omega_o} \right]^2 = \left[ q(0) - \frac{3F_o}{\omega_o^2} \right]^2$$

и далее

$$\left[ q(t) + (-1)^n \frac{F_o}{\omega_o^2} \right]^2 + \left[ \frac{\dot{q}(t)}{\omega_o} \right]^2 = \left[ q(0) - \frac{(2n-1)F_o}{\omega_o^2} \right]^2.$$

Изображающая точка останавливается в «мертвой» зоне  $-2F_o/\omega_o^2 \leq q \leq 2F_o/\omega_o^2$ .