Лекция 2.3
Устойчивость равновесия и движения системы

При рассмотрении установившихся движений уравнения возмущенного движения запишем в виде $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay} + \mathbf{Y}(\mathbf{y})$, где $\mathbf{y}$ – вектор-столбец, $\mathbf{A}$ – квадратная матрица постоянных коэффициентов, $\mathbf{Y}(\mathbf{y})$ – вектор-столбец аналитических в начале координат функций, разложение которых начинаются с членов не ниже второго порядка малости.
В приложениях вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется по уравнениям первого приближения $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$.

Теорема об устойчивости по первому приближению. *Если все корни характеристического уравнения* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ *имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов уравнения* $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay} + \mathbf{Y}(\mathbf{y})$. *Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво также независимо от нелинейных членов в исходном уравнении.*

Пусть часть корней характеристического уравнения комплексно-сопряженные, а часть вещественные . Комплексно-сопряженным и вещественным корням соответствуют соответственно комплексно-сопряженные и вещественные решения:

$$\lambda_{2k-1} = \nu_k + i\mu_k \quad \to \quad y_{2k-1} = u_k + iv_k,$$
$$\lambda_{2k} = \nu_k - i\mu_k \quad \to \quad y_{2k} = u_k - iv_k, \quad k = \overline{1,p},$$
$$\lambda_s \quad \to \quad y_s \quad s = \overline{2p+1,n}.$$

Составим положительно определенную функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p} y_{2k-1}y_{2k} + \sum_{s=2p+1}^{n} y_s^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p}\left(u_k^{\,2} + \nu_k^{\,2}\right) + \sum_{s=2p+1}^{n} y_s^{\,2}\right] \ge 0$$

Вычислим производную по времени этой функции в силу уравнений первого приближения в канонической форме $\dot{y}_i = \lambda_i y + (*), \quad i = \overline{1,n}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\lambda_{2k-1}y_{2k-1}y_{2k} + \lambda_{2k}y_{2k-1}y_{2k}\right) + \sum_{s=2p+1}^{n} 2\lambda_s y_s^{\,2}\right] + (*) =$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{p}\nu_k\left(u_k^{\,2} + \nu_k^{\,2}\right) + \sum_{s=2p+1}^{n}\lambda_s y_s^{\,2}\right] + (*)$$

Если вещественные части коней отрицательны, то квадратичная часть производной отрицательно определенная функция. В малой окрестности положения равновесия $|y_i| < h, \; i = \overline{1,n}$ отрицательно определенной будет вся функция $dV/dt < 0$. Итак выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости

При доказательстве второй части теоремы примем $\nu_1 > 0$. Функцию Ляпунова запишем в виде

$$V = \frac{1}{2}\nu_1\left(y_1y_2 + \sum_{k=2}^{p}\nu_k y_{2k-1}y_{2k} + \sum_{s=2p+1}^{n}\lambda_s y_s^{\,2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\nu_1\left[u_1^{\,2} + \nu_1^{\,2} + \sum_{k=2}^{p}\nu_k\left(u_k^{\,2} + \nu_k^{\,2}\right) + \sum_{s=2p+1}^{n}\lambda_s y_s^{\,2}\right].$$

Эта вещественная функция может принимать положительные и отрицательные значения Вычислим ее производную

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\nu_1\left[(\lambda_1+\lambda_2)y_1y_2 + \sum_{k=2}^{p}\nu_k(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k})y_{2k-1}y_{2k} + 2\sum_{s=2p+1}^{n}\lambda_s{}^2y_s{}^2\right] + (*) =$$

$$= \nu_1\left[\nu_1\left(u_1{}^2+v_1{}^2\right) + \sum_{k=2}^{p}\nu_k{}^2\left(u_k{}^2+v_k{}^2\right) + \sum_{s=2p+1}^{n}\lambda_s{}^2y_s{}^2\right] + (*)$$

Квадратичная часть этой производной положительно определенная и в малой окрестности положения равновесия $|y_i| < h,\ i=\overline{1,n}$ положительно определенной будет вся функция $dV/dt > 0$. Итак, выполнены условия теоремы Ляпунова о неустойчивости: функция Ляпунова может принимать положительные значения, а ее производная, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, положительно определенная.
Теорема доказана.

Пример. Твердое тело с неподвижной точкой в случае Эйлера вращается вокруг оси, соответствующей среднему по величине моменту инерции. Исследовать устойчивость движения по первому приближению.
Вводя возмущения по формулам $p = x,\quad q = \omega + y,\quad r = z$, получаем из динамических уравнений Эйлера уравнения возмущенного движения

$$\dot{x} = \frac{B-C}{A}(\omega+y)z,\quad \dot{y} = \frac{C-A}{B}zx,\quad \dot{z} = \frac{A-B}{C}x(\omega+y)$$

и уравнения линейного приближения $\dot{x} = \frac{B-C}{A}\omega z,\quad \dot{y} = 0,\quad \dot{z} = \frac{A-B}{C}\omega x$.
Подставляя $x = X\,e^{\lambda t},\quad y = Y\,e^{\lambda t},\quad z = Z\,e^{\lambda t}$ в эти уравнения, получаем

$$A\lambda X + (C-B)\omega Z = 0,\quad B\lambda Y = 0,\quad C\lambda Z + (B-A)\omega X = 0.$$

Для существования нетривиального решения относительно X,Y,Z определитель этой однородной системы уравнений должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} A\lambda & 0 & (C-B)\omega \\ 0 & B\lambda & 0 \\ (B-A)\omega & 0 & C\lambda \end{vmatrix} = B\lambda\left[AC\lambda^2 - (C-B)(B-A)\omega^2\right] = 0.$$

Это уравнение имеет один корень равный нулю, и при $A < B < C$ или $A > B > C$ - два вещественных корня: $\lambda = \pm\omega\sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}$. Наличие положительного корня означает неустойчивость вращения твердого тела вокруг оси среднего момента инерции.

Пример. Исследовать по первому приближению устойчивость резонанса одномерного осциллятора.
Дифференциальное уравнение имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = H\cos\omega t,\quad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0)$.
Решение этого уравнения $x = \frac{Ht}{2\omega}\sin\omega t$ принимаем в качестве невозмущенного движения. Уравнения возмущенного движения имеют вид $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. Корни $\lambda = \pm i\omega$ характеристического уравнения мнимо сопряженные. Корней с положительной вещественной частью нет. Движение устойчиво, но не асимптотически. Небольшие возмущения не могут изменить общего характера роста амплитуды.

Ляпунов также показал, что если у характеристического уравнения $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=0$ *нет ни одного корня с положительной вещественной частью, но есть корни, у которых вещественная часть равна нулю, то можно так подобрать нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения* $\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{Ay}+\mathbf{Y}(\mathbf{y})$, *чтобы имела место устойчивость или неустойчивость по желанию.*

Таким образом, приобретают большую практическую значимость необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни алгебраического уравнения $f_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}=0$ с вещественными коэффициентами имели отрицательную вещественную часть, то есть того, чтобы все корни были расположены в левой части комплексной плоскости. По теореме Виета имеем

$$f_n(\lambda)=a_o\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)=a_o\prod_{r=1}^{p}(\lambda-\alpha_k-i\beta_k)(\lambda-\alpha_k+i\beta_k)\prod_{s=2p+1}^{n}(\lambda-\lambda_s)=$$

$$=a_o\prod_{r=1}^{p}\left[(\lambda-\alpha_k)^2+\beta_k{}^2\right]\prod_{s=2p+1}^{n}(\lambda-\lambda_s)$$

Если все корни расположены в левой части комплексной плоскости $\alpha_r<0,\quad \lambda_s<0$, то имеем произведение различных сумм, что исключает появление нулевых и отрицательных коэффициентов.

Теорема. *Если все корни уравнения* $\sum_{i=o}^{m}a_i\lambda^{m-i}=0$ *имеют отрицательные вещественные части, то все его коэффициенты строго одного знака.*

Этот факт является необходимым, но отнюдь не достаточным условием того, чтобы все корни были расположены в левой полуплоскости.

В полиноме $f_n(\lambda)$ положим $\lambda=i\omega$ и рассмотрим отображение $f_n(i\omega)=U_n(\omega)+iV_n(\omega)=a_o\prod_{k=1}^{n}|i\omega-\lambda_k|\exp\left[i\sum_{k=1}^{n}\arg(i\omega-\lambda_k)\right]$ мнимой полуоси $0\le i\omega\le\infty$ на комплексную плоскость (U,V). Это отображение называют годографом полинома $f_n(\lambda)$.

Критерий Михайлова. *Для того чтобы многочлен* $f_n(\lambda)$ *был "устойчивым", то есть чтобы все его корни были расположены в левой полуплоскости, необходимо и достаточно: чтобы при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *годограф* $f_n(i\omega)=U(\omega)+iV(\omega)$ *не проходил через начало координат* $U=0, V=0$ *и монотонно менял аргумент на* $n\pi/2$.

Для вещественного корня $\lambda_k=\mp\alpha_k$ изменение угла между осью U и вектором $(i\omega-\lambda_k)$ равно $\Delta_0^\infty\arg(i\omega-\lambda_k)=\pm\frac{\pi}{2}$. Аналогично для каждой пары комплексно-сопряженных корней $\lambda_k=(\mp\alpha_k+i\beta_k),\quad \lambda^*{}_k=(\mp\alpha_k-i\beta_k)$ имеем $\Delta_o^\infty\arg(i\omega-\lambda_k)+\Delta_o^\infty\arg(i\omega-\lambda^*{}_k)=\pm\pi$.

Итак, для r корней слева и s корней справа от мнимой оси имеем изменение аргумента $\sum_{k=1}^{n}\Delta_{o}^{\infty}\arg(i\omega-\lambda_k)=(r-s)\frac{\pi}{2}=m\frac{\pi}{2}$. Всего корней $r+s=n$. Построение кривой $f_n(i\omega)$ позволяет определить значение разности $r-s=m$ и далее количество корней в левой и правой полуплоскостях $r=\frac{n+m}{2}$, $s=\frac{n-m}{2}$. Отсюда следует, что все корни расположены в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n}\Delta_{o}^{\infty}\arg(i\omega-\lambda_k)=n\frac{\pi}{2}$.

Если имеется пара чисто мнимых корней $\lambda_k=\pm i\omega_o$, то в выражении $f_n(i\omega)=U_n(\omega)+iV_n(\omega)$ имеется множитель $(i\omega-\lambda_k)(i\omega-\lambda^*{}_k)=(\omega_o{}^2-\omega^2)$ и при $\omega=\omega_o$ обращаются в нуль вещественная и мнимая части годографа $U(\omega_o)=V(\omega_o)=0$. Годограф $f(i\omega)$ проходит через начало координат . ***Теорема доказана***

Критерий Михайлова не дает ответа на вопрос: как изменится распределение корней полинома при изменении его коэффициентов (параметров системы). Допустим, что коэффициенты полинома $f_{2n}(\lambda)$ могут изменяться в некотором диапазоне $\underline{a}_k<a_k<\overline{a}_k$, $k=\overline{0,2n}$.

Тогда степенному многочлену $U_{2n}(i\omega)=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}(i\omega)^{2(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}a_{2k}\omega^{2(n-k)}$ можно сопоставить многочлены $U_{\min}(i\omega)$, $U_{\max}(i\omega)$, а степенному многочлену $iV_{2n}(i\omega)=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}(i\omega)^{2(n-k)+1}=i\omega\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}a_{2k-1}\omega^{2(n-k)}$ – многочлены $iV_{\min}(i\omega), iV_{\max}(i\omega)$.

Многочлены $U_{\min}(i\omega)$, $U_{\max}(i\omega)$ формируются из слагаемых $(-1)^{n-k}a_{2(n-k)}(i\omega)^{2(n-k)}$ многочлена $f_{2n}(i\omega)$ с последующими заменами $-a_{2k}\to-\overline{a}_{2k}$, $a_{2k}\to\underline{a}_{2k}$
и заменами $-a_{2k}\to-\underline{a}_{2k}$, $a_{2k}\to\overline{a}_{2k}$ соответственно.

Аналогичным образом формируются многочлены $iV_{\min}(i\omega)$ и $iV_{\max}(i\omega)$ из слагаемых $i\omega(-1)^{n-k}a_{2k-1}(i\omega)^{2(n-k)}$ с последующими заменами $-a_{2k-1}\to-\overline{a}_{2k-1}$, $a_{2k-1}\to\underline{a}_{2k-1}$ и заменами $-a_{2k-1}\to-\underline{a}_{2k-1}$, $a_{2k-1}\to\overline{a}_{2k-1}$.

Критерий Харитонова. *Если годографы* $f_1=U_{\min}+iV_{\min}$, $f_2=U_{\min}+iV_{\max}$, $f_3=U_{\max}+iV_{\min}$, $f_4=U_{\max}+iV_{\max}$ *удовлетворяют критерию Михайлова, то корни полинома, у которого коэффициенты заключены в рассматриваемом диапазоне, будут расположены в левой части комплексной плоскости.*

В 1875 году английский механик Д.Раус дал алгоритм, с помощью которого по коэффициентам многочлена можно установить является ли он “устойчивым”. В 1895 году немецкий математик Гурвиц независимо от Д.Рауса установил тот же критерий в видоизмененной форме с помощью определителей.

Полином $f_n(\lambda)$, все коэффициенты которого положительны, называют стандартным полиномом. Стандартный полином называют устойчивым или полиномом Гурвица $f_n(\lambda)\in H$, если все его корни обладают отрицательными вещественными частями.

Полином $F_{n+1}(\lambda)=(1+\beta\lambda)f_n(\lambda)+f_n(-\lambda)$, где $\beta>0$ называют присоединенным к полиному $f_n(\lambda)$. Имеют место два факта.

Лемма 1. *Полином, присоединенный к стандартному полиному Гурвица $f_n(\lambda)\in H$, $n\ge 1$, есть стандартный полином Гурвица $F_{n+1}(\lambda)\in H$.*

Рассмотрим полином $\Phi_\mu(\lambda)=(1+\beta\lambda)f_n(\lambda)+\mu f_n(-\lambda)$, где $0\le\mu\le 1-$ действительный параметр. Покажем, что корни полинома $\Phi_\mu(\lambda)$ расположены в левой полуплоскости, то есть $\Phi_\mu(\lambda)\in H$. Коэффициенты $b_k(\mu)$, $k=\overline{1,n+1}$ этого полинома линейные функции параметра μ и $b_o=\beta a_o>0$. При больших значения $|\lambda|\ge R$ $|\Phi_\mu(\lambda)|>0$, поэтому корни заключены внутри конечного круга и являются ограниченными непрерывными функциями параметра μ. При $\mu=0$ полином $\Phi_o(\lambda)$ имеет корни в левой полуплоскости, то есть $\Phi_o(\lambda)\in H_{n+1}$. Если при изменении параметра μ хотя бы один из корней переходит в правую полуплоскость, то при некотором значении $\tilde\mu\in(0,1]$ имеется мнимый корень $\lambda_k=\pm i\nu$ и $\Phi_{\tilde\mu}(i\nu)\equiv(1+i\beta\nu)f_n(i\nu)+\tilde\mu f_n(-i\nu)=0$, где $f_n(\pm i\nu)\ne 0$, так как $f_n(\lambda)\in H$. Тогда имеем $|1+i\beta\nu||f_n(i\nu)|=\tilde\mu|f_n(-i\nu)|$ $\rightarrow$

$$\rightarrow\ |1+i\beta\nu|=\tilde\mu\ \rightarrow\ 1+\beta^2\nu^2=\tilde\mu^2. \qquad (*)$$

Свободный член полинома отличен от нуля $\Phi_\mu(0)=(1+\mu)a_n\ne 0$, поэтому нулевых корней нет $\nu\ne 0$ и равенство (*) для $0\le\mu\le 1$ невозможно. Итак, ни один из корней не переходит в правую полуплоскость и, следовательно, $F_{n+1}(\lambda)=\Phi_1(\lambda)\in H$. ***Лемма доказана.***

Лемма 2. *Для всякого стандартного полинома Гурвица $F_{n+1}(\lambda)\in H$ существует стандартный полином Гурвица $f_n(\lambda)\in H$, $n\ge 1$, по отношению к которому данный полином является присоединенным, то есть существует $\beta>0$ и $f_n(\lambda)\in H$ такие, что $F_{n+1}(\lambda)=(1+\beta\lambda)f_n(\lambda)+f_n(-\lambda)$.*

Кроме этого равенства имеем $F_{n+1}(-\lambda)=(1-\beta\lambda)f_n(-\lambda)+f_n(\lambda)$. Исключая $f(-\lambda)$, получаем

$$F_{n+1}(-\lambda)-(1-\beta\lambda)F_{n+1}(\lambda)=\beta^2\lambda^2 f_n(\lambda) \qquad (*)$$

В явном виде $F_{n+1}(\lambda)=A_o\lambda^{n+1}+\ldots+A_k\lambda^{n+1-k}+\ldots+A_n\lambda+A_{n+1}$ и

$$F_{n+1}(-\lambda)=A_o(-\lambda)^{n+1}+\ldots+A_k(-\lambda)^{n+1-k}+\ldots-A_n\lambda+A_{n+1}.$$

Если принять $\beta A_{n+1}=2A_n \ \rightarrow\ \beta=\dfrac{2A_n}{A_{n+1}}$, то функция $f_n(\lambda)$, определяемая равенством (*) будет полиномом степени n. Докажем, что $f_n(\lambda)\in H$.

Рассмотрим полином $\Phi_\mu(\lambda)=\mu F_{n+1}(-\lambda)-(1-\beta\lambda)F_{n+1}(\lambda)=$

$$=\beta A_o\lambda^{n+2}+\left\{\beta A_1+\left[\mu(-1)^{n+1}-1\right]A_o\right\}\lambda^{n+1}+\ldots+\left\{\beta A_{k+1}+\left[\mu(-1)^{n+1-k}-1\right]A_k\right\}\lambda^{n+1-k}+\ldots$$

$$\ldots+\left[\beta A_{n+1}-(\mu+1)A_n\right]\lambda+(\mu-1)A_{n+1}, \qquad \text{где } 0\le\mu\le 1 \text{ и } \beta A_o>0.$$

Корни этого полинома ограниченные непрерывные функции параметра μ. При $\mu=0$ один из корней $\lambda_{n+2}=\beta=2A_n/A_{n+1}$ находится в правой полуплоскости, и такое расположение корней сохраняется при $\mu\in[0,1]$. Если хотя бы еще один корень переходит в правую полуплоскость, то при некотором значении $\tilde\mu$ возникает пара мнимых корней

$\lambda_k = \pm i\nu$. Во-первых, $\nu \neq 0$ так как $\Phi_\mu(0) = (\mu - 1) A_{n+1} \neq 0$ при $\mu \neq 0$. Во-вторых, $F_{n+1}(\lambda) -$ полином Гурвица и следовательно $\left|F_{n+1}(\pm i\nu)\right| \neq 0$. Равенство $\Phi_{\tilde{\mu}}(\pm i\nu) = 0$ дает $\tilde{\mu} F_{n+1}(\mp i\nu) = (1 \mp i\beta\nu) F_{n+1}(\pm i\nu) \quad \rightarrow \quad \left|1 \mp i\beta\nu\right| = \tilde{\mu} \quad \rightarrow \quad 1 + \beta^2\nu^2 = \tilde{\mu}^2$, что невозможно. Итак, на интервале $\mu \in [0,1)$ распределение корней полинома $\Phi_\mu(\lambda) = 0$ сохраняется.

При $\mu = 1$ полином $\Phi_1(\lambda) = 0$ имеет двукратный нулевой корень, то есть при $\mu \to 1$ $\lambda_p(\mu) \to 0$ и $\lambda_q(\mu) \to 0$.

На основании известных соотношений между корнями и коэффициентами полинома $\sum_{s=1}^{n} \lambda_s = \frac{a_1}{a_o}, \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\lambda_s} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ при $0 \le \mu \le 1$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{\beta A_{n+1} - (\mu + 1) A_n}{(\mu - 1) A_{n+1}} = \frac{2A_n - (\mu + 1) A_n}{(\mu - 1) A_{n+1}} = -\frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

Два стремящихся к нулю вещественных корня должны быть расположены по разные стороны мнимой оси, так как в противном случае левая часть стремится к $\pm\infty$, а правая остается ограниченной константой при любых значениях $\mu \to 1$. Так как $\lambda_{n+2} = \beta = 2A_n / A_{n+1}$ единственный корень с положительной вещественной частью, то положим $p = n+2$ и $q = n+1$. Поскольку при $\mu \to 1$ коэффициент при λ^2 отличен от нуля $\beta A_n + (\mu - 1) A_{n-1} \to \beta A_n \neq 0$ заключаем, что все остальные корни полинома $\Phi_1(\lambda) = \beta^2 \lambda^2 f_n(\lambda) = 0$ остались в левой полуплоскости. Итак, $f_n(\lambda) \in H$. ***Лемма доказана.***

Из леммы 1 и 2 следует, что множество всех стандартных полиномов Гурвица можно построить из стандартных полиномов Гурвица первой степени, применяя последовательно операцию присоединения.

Критерий Рауса-Гурвица *Для того чтобы все корни уравнения* $\sum_{i=o}^{m} a_i \lambda^{m-i} = 0$ *с вещественными коэффициентами одного знака имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы Гурвица были положительными*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{m-2} & a_m \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}$$

Методом математической индукции докажем необходимость условий Гурвица, то есть, что из условия $f_n(\lambda) \in H$ следуют условия теоремы.

При $n = 1$ имеем $f_1(\lambda) = a_o\lambda + a_1, \quad a_o > 0, \quad a_1 \neq 0$. Так как $\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_o} < 0$, условие Гурвица $\Delta_1 = a_1 > 0$ выполнено.

При $n = 2$ имеем $f_2(\lambda) = a_o\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad a_o > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 \neq 0$.

Так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_o a_2}}{2a_o} < 0 \;\;\rightarrow\;\; a_1 > 0,\;\; a_2 > 0$, условия Гурвица $\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_o & a_2 \end{vmatrix} > 0$ выполнены.

Пусть для всех полиномов $f_n(\lambda) \in H$ теорема справедлива. По Лемме 1 будем рассматривать $F_{n+1}(\lambda) \in H$, как присоединенный для полинома $f_n(\lambda) \in H$ и покажем выполнение условий теоремы для полинома $F_{n+1}(\lambda)$. Пусть $f_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k}$, построим присоединенный полином $F_{n+1} = (1+\beta\lambda) f_n(\lambda) + f_n(-\lambda) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} + \beta \sum_{k=o}^{n} a_k \lambda^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k \lambda^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \beta a_k + \left[1 + (-1)^{n+1-k} \right] a_{k-1} \right\} \lambda^{n+1-k},\; a_{-1} = 0,\; a_{n+1} = 0.$$

Составим матрицу Гурвица

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \beta a_{n-1} + 2a_{n-2} & 2a_n & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-3} + 2a_{n-4} & \beta a_{n-1} + 2a_{n-2} & 2a_n & 0 & 0 \\ 2a_n \ldots & \beta a_{n-4} & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-5} + 2a_{n-6} & \beta a_{n-3} + 2a_{n-4} & \beta a_{n-1} + 2a_{n-2} & 2a_n & 0 \\ \ldots & \ldots & \beta a_{n-4} & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 \\ \ldots & \ldots & \beta a_{n-5} + 2a_{n-6} & \beta a_{n-3} + 2a_{n-4} & \beta a_{n-1} + 2a_{n-2} & 2a_n \end{vmatrix}$$

Строку с номером $n+1-(2s-1), \quad s = 1,2,\ldots$ умножим на $2/\beta$ и вычтем из предыдущей строки. В результате определитель принимает вид

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \beta a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-3} & \beta a_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-4} & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 & 0 \\ \ldots & \beta a_{n-5} & \beta a_{n-3} & \beta a_{n-1} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \beta a_{n-4} & \beta a_{n-2} & \beta a_n & 0 \\ \ldots & \ldots & \beta a_{n-5} + 2a_{n-6} & \beta a_{n-3} + 2a_{n-4} & \beta a_{n-1} + 2a_{n-2} & 2a_n \end{vmatrix}$$

и $\qquad D_k = \beta^k \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1, n+1}$.

Итак, для полинома $F_{n+1}(\lambda) \in H$ условия теоремы выполнены.

Доказательство достаточности состоит в проверке факта $F_{n+1}(\lambda) \in H$ при выполнении условий Гурвица

При $n = 1$ имеем $F_1(\lambda) = A_o\lambda + A_1$, где $A_o > 0, \quad D_1 = A_1 > 0$. Корень полинома отрицательный $\lambda_1 = -A_1 / A_o$.

При $n = 2$ имеем $F_2(\lambda) = A_o\lambda^2 + A_1\lambda + A_2$, где $A_o > 0, \quad D_1 = A_1 > 0,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_o & A_2 \end{vmatrix} > 0 \ \rightarrow \ A_2 > 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^{\ 2} - 4A_o A_1}}{2A_o} < 0 \ .$$

Полином $F_{n+1}(\lambda)$ можно рассматривать как присоединенный к некоторому стандартному полиному $f_n(\lambda)$. Выше было показано $D_{2k-1} = \beta^{2k-1}\Delta_{2k-1} > 0$. Для индекса n выполнение условий теоремы означает, что $f_n(\lambda) \in H$. Следовательно, на основании Леммы 2 $F_{n+1}(\lambda) \in H$. ***Теорема доказана.***