Лекция 2.1
Принцип возможных перемещений

Для системы материальных точек с идеальными стационарными связями имеют место уравнения движения $m_\nu \mathbf{W}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \quad \nu = \overline{1,N}$, где m_ν – масса ν – ой точки, $\mathbf{W}_\nu$ – ее ускорение, а $\mathbf{F}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ – соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку. В силу идеальности связей в любом положении системы на любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad \to \quad \sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{W}_\nu \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 .$$

Последнее равенство называется *общим уравнением динамики.*

Определение. *Положением равновесия системы называется такое ее положение, в котором она находится сколь угодно долго, если в начальный момент времени скорости всех точек системы равны нулю.*

Теорема. *Для того чтобы некоторое (совместное со связями) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 . \qquad (1)$$

Необходимость следует из общего уравнения динамики: $\mathbf{W}_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1,N} \quad \to$ $\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$. Доказательство достаточности проведем рассуждением от обратного. Допустим, что условие (1) выполнено, но система не находится в положении равновесия. Тогда из состояния покоя под действием сил и реакций связей за малый промежуток времени точки совершат возможное перемещение совместное со стационарными связями. Перемещения из состояния покоя происходят в сторону равнодействующих сил $\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu$, при этом совершается положительная работа

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \right) \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu > 0 .$$

Вторая сумма в этом выражении в силу идеальности связей равна нулю, тогда первая – положительна, что противоречит предположению.

Определение. *Механическая система называется стационарно заданной, если положение любой точки системы определяется только значениями обобщенных координат*: в соотношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q^1, \ldots, q^n\right)$ не входит явно время t. В противном случае система называется не стационарно заданной.

Теорема. *Для стационарно заданной системы имеет место эквивалентность*

$$\left\{ \mathbf{V}_\nu \equiv 0, \ \nu = \overline{1,N} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \dot{q}^s \equiv 0, \ s = \overline{1,n} \right\}.$$

Система стационарно задана, поэтому $\mathbf{V}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^s} \dot{q}^s, \quad \nu = \overline{1,N}$.

Доказательство $\Leftarrow$ исчерпывается подстановкой $\dot{q}^s = 0,\ s = \overline{1,n}$ в выражения скоростей. В силу того, что ранг матрицы $\{\partial \mathbf{r}_\nu / \partial q^s\}$ равен n, $\Rightarrow \quad \dot{q}^s = 0,\ s = \overline{1,n}$ следует из условия $\mathbf{V}_\nu \equiv 0,\ \nu = \overline{1,N}$.

Теорема. *Положение* $q_o^s,\ s = \overline{1,n}$ *является положением равновесия стационарно заданной системы тогда и только тогда, когда для обобщенных сил тождественно по времени выполняются равенства* $Q_s(t, q_o, 0) \equiv 0, \quad s = \overline{1,n}$.

Основное уравнение динамики в независимых координатах принимает вид
$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{W}_\nu \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) \delta q^i = 0$$
В силу независимости координат для стационарно заданной системы имеем
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \ddot{q}^i + \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(t, q, \dot{q}),\ k = \overline{1,n}.$$
В положении равновесия $\dot{q}^i(t) = 0, \quad \ddot{q}^i(t) = 0, \quad i = \overline{1,n}$ и $Q_k(t, q, \dot{q}) = 0,\ k = \overline{1,n}$. Уравнения Лагранжа разрешимы относительно вторых производных, то есть приводимы к нормальному виду и имеют единственное решение. В случае $q^k(0) = q_o^k,\ \dot{q}^k(0) = 0,\ Q_k(t, q_o, 0) = 0,\ k = \overline{1,n}$ есть решение $q(t) \equiv q_o$. Равенство нулю обобщенных сил является частным случаем принципа возможных перемещений $\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q^s = 0$.

Принцип Даламбера. *При движении системы любое ее положение можно рассматривать как положение равновесия, если к активным силам, действующим на систему в этом положении прибавить фиктивные силы инерции.*

Принцип возможных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. В простейшем виде с древнейших времен принцип был известен под названием «золотого правила механики»: *выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот*. Из принципа можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы.

1. Например, для свободного твердого тела имеем
$$\delta A = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{V}_\nu dt = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) dt =$$
$$= \left(\mathbf{V}_o \cdot \sum_\nu \mathbf{F}_\nu + \boldsymbol{\omega} \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu \right) dt = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{V}_o + \mathbf{M}_o \cdot \boldsymbol{\omega}) dt = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_o + \mathbf{M}_o \cdot \delta \varphi$$
Замена $\delta \mathbf{r}_\nu$ на $d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{V}_\nu dt$ законна в силу того, что твердое тело является склерономной системой .

В силу произвольности векторов $\delta \mathbf{r}_o$ и $\delta \varphi$ равенство $\delta A = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_o + \mathbf{M}_o \cdot \delta \varphi = 0$ может иметь место тогда и только тогда, когда

$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_o = \mathbf{M} = 0$. Последние два равенства представляют собой *необходимое и достаточное условия равновесия свободного тела*.

2. Для системы твердых тел в поле силы тяжести имеем

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu g \delta z_\nu = Mg\delta z_c = 0 \quad \rightarrow \quad \delta z_c = 0 .$$

Положениями равновесия системы твердых тел будут те положения, при которых центр тяжести занимает наинизшее, наивысшее или какое-либо «стационарное» положение по вертикали (принцип Торричелли).

3. Цепная линия - форма равновесия тяжелой однородной цепи, закрепленной в двух точках. Пусть цепь, соединяющая точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, имеет форму кривой $x = x(z)$, где Oz - вертикаль. Длина цепи L неизменна

$$L = \int_{z_i}^{z_2} ds = \int_{z_i}^{z_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz = const . \qquad (2)$$

Координата z_c центра тяжести однородной цепи определяется равенством

$$z_c L = \int_{z_1}^{z_2} z ds = \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz . \qquad (3)$$

Форма кривой, доставляющая стационарное значение интегралу (3) при условии (2), удовлетворяет уравнению $\dfrac{d}{dz}\dfrac{\partial F}{\partial x'} - \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, где $F = (\lambda + z)\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}$

и $x' = \dfrac{dx}{dz}$. Это уравнение было получено еще Л.Эйлером.

Так как функция F не зависит от x имеем $\dfrac{\partial F}{\partial x'} = \dfrac{(\lambda + z) dx/z}{\sqrt{1 + (dx/dz)^2}}$ =C или

$\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{C}{\sqrt{(\lambda + z)^2 - C^2}}$, где $C -$произвольная постоянная. Интегрируя, получаем

$\dfrac{x - \alpha}{C} = Arch \dfrac{\lambda + z}{C} \quad \rightarrow \quad z = -\lambda + C\, ch \dfrac{x - \alpha}{C}$, где значения постоянных λ, C, α определяются из условия закрепления концов и равенства (2).

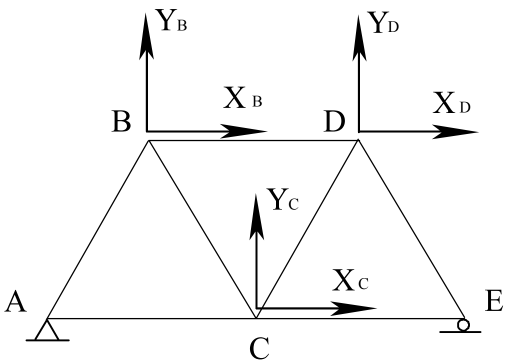
Инженерные объекты различного назначения (машины, приборы, здания, корабли, самолеты и т.д.) должны отвечать широкому кругу требований, выполнение которых обеспечивает их надежную и эффективную эксплуатацию. Важнейшими, а в ряде случаев определяющими являются требования достаточной прочности и жесткости конструкции. Инженерная дисциплина, в которой рассматриваются экспериментальные и теоретические основы методов оценки прочности и жесткости конструкций с одновременным учетом экономичности, получила название *сопротивления материалов.* Сейчас имеем множество других инженерных и научных дисциплин: строительная механика, теория упругости, теория пластичности и т.д.

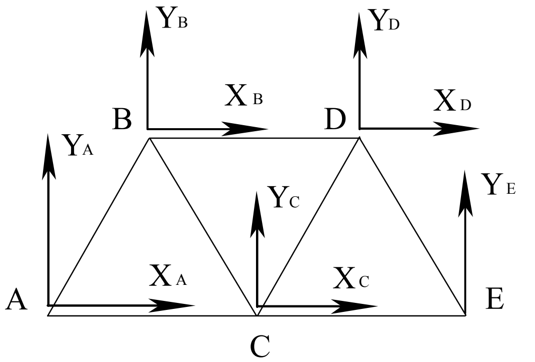
Проблема прочности конструкций, решаемая человечеством на всем протяжении его истории, трансформировалась из задачи о прочной хижине в задачу о прочности современного небоскреба или авиалайнера. В древности и в средние века эти задачи решались методом проб и ошибок, что вело к многочисленным авариям. Первые попытки обоснованного научного решения задачи прочности конструктивного элемента совпадают по времени с эпохой великих географических открытий XV-XVII веков и обусловлены необходимостью создания судов значительной грузоподъемности. Именно к этому периоду относятся опыты Леонардо да Винчи по определению прочности проволок и канатов. Однако основоположником сопротивления материалов как науки принято считать Г.Галилея, который поставил серию специальных экспериментов по оценке прочности изгибаемых деревянных брусьев в зависимости от их размеров.

Следующий важнейший этап истории сопротивления материалов связан с именами английских ученых Р.Гука и Т.Юнга. Первому принадлежит приоритет в открытии и четкой формулировке фундаментального закона сопротивления материалов, согласно которому деформация, то есть изменение размеров конструкционного элемента, прямо пропорциональна приложенной к нему силе. Несколько позже, в конце XVIII века Т.Юнг придал этому утверждению законченную математическую формулировку с одновременным истолкованием механического смысла используемых констант, характеризующих прочностные свойства материала.

Рассмотрим некоторые задачи сопротивления материалов на конкретных примере.

Рассчитать усилия в поясах фермы, изображенной на рисунке. Ферма составлена из стержней равной длины $AB = AC = BC = BD = CD = CE = DE = a$. В узлах B, C, D фермы приложены равные по величине горизонтальные и вертикальные силы $X_B = Y_B = X_C = Y_C = X_D = Y_D = P$.





Сначала определим реакции опор. Принцип освобождаемости от связей позволяет заменить опоры A и E реакциями X_A, Y_A, Y_E и считать ферму свободной. В равновесии главный вектор и главный момент всех сил равны нулю: $\sum X = X_A + 3P = 0, \quad \sum Y = Y_A + Y_E + 3P = 0,$

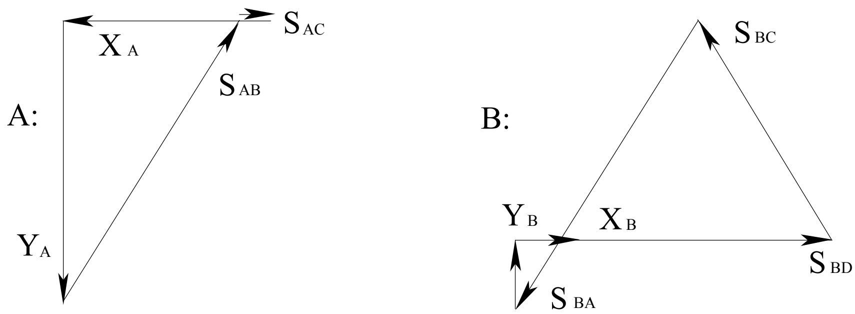
$$\sum M_C = -Y_A a + Y_E a - Pa\sqrt{3} = 0, \quad \rightarrow$$

$$X_A = -3P, \quad Y_E = \frac{\sqrt{3}-3}{2}P \approx -0.634P, \quad Y_A = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}P \approx -4.732P.$$

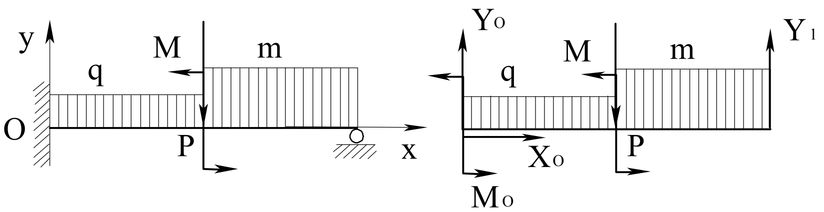
В IXX веке все конструкции такого типа были клепанные. Это позволяло считать, что в узлах фермы имеются шарниры и стержни находятся в состоянии сжатия или растяжения. Поскольку каждый узел фермы находится в равновесии, силы действующие на узел образуют замкнутый многоугольник.

Ниже приведены такие многоугольники для узлов A и B.

Начиная с середины XX века, конструкции стали делать сварными и предположение, что в узлах конструкции расположены шарниры, оказалось плохим приближением.



Кроме того, как правило, уравнений статики недостаточно для определения усилий, действующих на элементы стержневой конструкции. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует нагруженная консоль с опертым свободным концом.

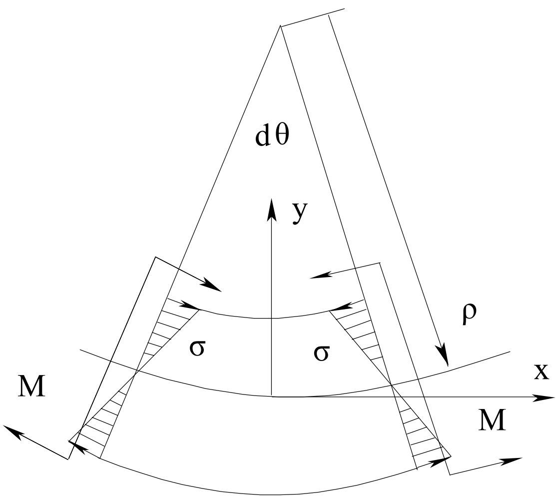


Имеем три уравнения $\quad \sum X = X_O, \quad \sum Y = Y_O - ql - P + Y_1,$

$$\sum M_Z = M_O - \frac{1}{2}ql^2 + M - Pl - ml + 2Y_1 l$$

для определения четырех неизвестные реакций X_O, Y_O, M_O, Y_1.

Проблема решается учетом малых деформаций балки. При действии внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции балки, наблюдается искривление её оси в той же плоскости, происходит так называемый плоский изгиб. Изогнутая ось балки описывается уравнением $y = f(x)$. Каждое сечение балки при этом поворачивается на угол θ по отношению к своему начальному положению: $\theta \approx tg\theta = \dfrac{dy}{dx}$.



Экспериментальное изучение работы материала при чистом изгибе показывает, что относительное удлинение волокон пропорционально их расстоянию до нейтрального слоя $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\dfrac{y}{\rho}$, где $\rho -$ радиус кривизны изогнутой оси. Деформации связаны с напряжением законом Гука $\sigma = E\varepsilon \;\rightarrow\; \sigma = -\dfrac{Ey}{\rho}$, где $E-$ модуль Юнга.

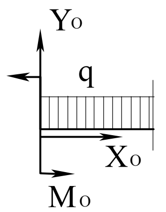
Связь нормального напряжения σ с изгибающим моментом следует из условия равновесия выделенного элемента балки

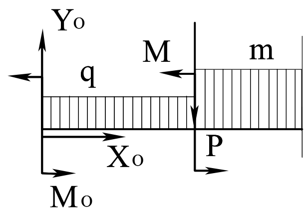
$$\sum X = \int_S \sigma(y)dS = 0, \quad \sum M_Z = \int_S \sigma(y)ydS = -M_Z(x),$$

$$\sum M_Z = \frac{E}{\rho}\int_S y^2 dS = M_Z(x) \quad \rightarrow \quad \frac{E}{\rho}J = M(x),$$ где

$J = \int_S y^2 dS -$момент инерции сечения. Итак, $\sigma = \dfrac{M(x)}{J}y, \quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M(x)}{EJ}$.

Последнее выражение определяет также дифференциальное уравнение изогнутой оси $\quad \dfrac{1}{\rho(x)} = \pm\dfrac{d^2y/dx^2}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} \approx \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{M(x)}{EJ}$





В первом сечении $0 \le x \le l$ нормальные напряжения σ создают момент уравновешивающий внешнюю нагрузку $M_Z(x) = -M_O - \dfrac{1}{2}qx^2 + Y_O x$, а во втором сечении $l \le x \le 2l$ -

$$M_Z(x) = -M_O - ql\left(x - \frac{l}{2}\right) + Y_O x - M - P(x-l) - m(x-l)$$

Итак, имеем $0 \le x \le l$: $\quad EJ\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M_O - \dfrac{1}{2}qx^2 + Y_O x$,

$l \le x \le 2l$: $\quad EJ\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M_O - ql\left(x - \dfrac{l}{2}\right) + Y_O x - M - P(x-l) - m(x-l)$.

Отметим, что эти уравнения можно интегрировать при неизвестных реакциях.

Условие непрерывности изогнутой оси в точке $x = l$ $\lim\limits_{\alpha\to 0} y(l-\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0} y(l+\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dy(l-\alpha)}{d\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dy(l+\alpha)}{d\alpha}$ и условия на концах балки $y(0) = y(l) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{dy}{dx} = 0$ совместно с тремя уравнениями равновесия позволяют определить неизвестные реакции и константы интегрирования.