Лекция 2.10.
Уравнение Гамильтона-Якоби

1. Отметим, что процесс движения гамильтоновой системы является каноническим преобразованием.

Решение уравнений Гамильтона $q = q(t, \alpha, \beta), \quad p = p(t, \alpha, \beta)$, записанные в виде $\alpha = \alpha(t, q, p), \quad \beta = \beta(t, q, p)$, представляют собой полный набор независимых первых интегралов. Будем считать, что эти постоянные совпадают со значениями координат и импульсов в начальный момент, то есть $q^s(0) = \alpha^s, \quad p_s(0) = \beta_s, \quad i = \overline{1, n}$. Вычислим значения скобок Лагранжа в начальный момент времени $\left[\alpha^s \alpha^k\right]_{t=o} = 0, \quad \left[\beta_s \beta_k\right]_{t=o} = 0$,

$$\left[\alpha^s \beta_k\right]_{t=o} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q^i}{\partial \alpha^s} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} - \frac{\partial q^i}{\partial \beta_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha^s} \right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} \delta_{ik} = \delta_{sk}, \qquad .$$

Аналогичные значения имеем для скобок Пуассона

$$\left(\alpha^s \alpha^k\right)_{t=o} = 0, \quad \left(\alpha^s \beta_k\right)_{t=o} = \delta_{sk}, \quad \left(\beta_s \beta_k\right)_{t=o} = 0.$$

Поскольку скобки Пуассона любых двух интегралов сохраняются, полученные соотношения имеют место при любом t. Итак, решение уравнений Гамильтона в виде $q = q[t, q(0), p(0)], \quad p = p[t, q(0), p(0)]$ является унивалентным каноническим преобразованием от начальных значений координат и импульсов к их текущим значениям. Функция Гамильтона, соответствующая переменным $q^s(0) = \alpha^s, \quad p_s(0) = \beta_s, \quad i = \overline{1, n}$, равна нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \dot{\alpha}^i - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H \right) = -\frac{dF}{dt} \quad \text{или} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q^i - H \delta t \right)_o^{t(\alpha)} = \delta F.$$

Это выражение совпадает с вариацией действия по Гамильтону. Следовательно, действие $W(t, \alpha, \beta) = \int_o^t L[\tau, q(\tau, \alpha, \beta), \dot{q}(\tau, \alpha, \beta)] d\tau$ есть производящая функция рассматриваемого канонического преобразования.

Гамильтон предложил выразить начальные значения импульсов из решений $\beta_s = \beta_s(t, q, \alpha)$ и представить действие как функцию $W = W(t, q, \alpha)$. В таком виде производящая функция называется главной функцией Гамильтона. Структурные формулы критерия каноничности преобразования определяют уравнение, которому должна удовлетворять главная функция Гамильтона:

$$\frac{\partial W}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha^i} = -\beta_i, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) = 0.$$

Получился порочный круг: для написания конечных уравнений движения нужна главная функция Гамильтона, а для составления этой функции нужно знать конечные уравнения движения.

2. Якоби разорвал этот порочный круг. Он показал, что конечные уравнения движения $\dfrac{\partial S}{\partial q^i} = p_i, \quad \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}^i$ могут быть написаны при помощи интеграла $S(t, q, \alpha)$ уравнения Гамильтона-Якоби $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \dfrac{\partial S}{\partial q} \right) = 0$.

В качестве новых переменных Якоби предложил принимать значения интегралов $\alpha(t,q,p)=\tilde{q}$ или $\alpha(t,q,p)=\tilde{p}$, и исключил тем самым переход к начальным значениям координат и импульсов.

Определение. *Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби* $\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0$ *называется решение* $S\left(t,q^1,\ldots,q^n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$, *удовлетворяющее условию* $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial\alpha_j}\right)\neq 0$.

Смысл этого условия состоит в возможности рассматривать решение $S(t,q,\alpha)$, как производящую функцию унивалентного канонического преобразования, то есть в разрешимости уравнений $\frac{\partial S}{\partial q^i}=p_i$, $\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}=\pm\beta_j$ и построении прямого и обратного преобразований. Постоянные α_j трактуются как новые импульсы или координаты.

Возможность этих построений регламентирована теоремой Лиувилля об интегрируемости канонической системы методом Гамильтона-Якоби.

Определение. Функции $f_s(t,q,p)$, $s=\overline{1,m}$ находятся в инволюции, или образуют систему в инволюции, если все скобки Пуассона $\left(f_s f_k\right)$ тождественно равны нулю.

Теорема Лиувилля. *Для того чтобы каноническая система порядка* $2n$ *интегрировалась методом Гамильтона-Якоби необходимо и достаточно, чтобы она имела* n *независимых интегралов в инволюции.*

Поскольку скобки Пуассона инвариантны относительно унивалентного канонического преобразования, значения этих n интегралов можно принять, например, за новые импульсы: $\left(f_i(t,q,p)f_j(t,q,p)\right)=\left(\tilde{p}_i\tilde{p}_j\right)=0$.

В противном случае этого делать нельзя. Независимость интегралов означает их разрешимость относительно исходных импульсов $p_k=\psi_k(t,q,\tilde{p})$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы имеют место равенства

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial q^k}=\frac{\partial\psi_k}{\partial q^s},\quad s,k=\overline{1,n}. \qquad (*)$$

Продифференцируем по координатам q^i тождество $f_k\left[t,q,\psi(t,q,\tilde{p})\right]\equiv\tilde{p}_k$, умножим результат на $\frac{\partial f_s}{\partial p_i}$ и далее просуммируем по индексу i:

$$\frac{\partial f_k}{\partial q^i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial q^i}=0\quad\rightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial q^i}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_j}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial q^i}=0,$$

и аналогично $\frac{\partial f_s}{\partial q^i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial p_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial q^i}=0\quad\rightarrow$

$$\rightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial q^i}+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial p_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial q^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial q^i}+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial p_j}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial q^j}=0.$$

В силу условия $\left(f_k f_s\right) \equiv 0$, разность этих выражений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial q^i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial q^j} \right) = 0.$$

Независимость интегралов означает, что $\det \dfrac{\partial\left(f_1 \ldots f_n\right)}{\partial\left(q^1 \ldots q^n\right)} \neq 0$ и системы уравнений $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_k}{\partial p_j} x_j = 0$ $\quad x_j = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_s}{\partial p_i} y_i = 0$ $\quad y_i = \left(\dfrac{\partial \psi_j}{\partial q^i} - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q^j} \right) = 0$ имеют только тривиальные решения. Итак, равенства (*) доказаны.

Кроме того, $-\dfrac{\partial H}{\partial q^i} = \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{d\psi_i}{dt} = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q^j} \dfrac{dq^j}{dt} = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q^j} \dfrac{\partial H}{\partial p_j}$ и следовательно

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial q^j} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial q^i} = -\frac{\partial H(t,q,\psi)}{\partial q^i}$$

или
$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} = -\frac{\partial H(t,q,\psi)}{\partial q^i}. \qquad (**)$$

Равенств (*) и (**) являются необходимыми и достаточными условиями интегрируемости системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = \psi_i, \quad i = \overline{1,n} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(t,q,\psi).$$

Функция S является полным интегралом уравнения Гамильтона –Якоби поскольку $\det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \tilde{p}_j \partial q^i} \right) = \det\left(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{p}_j} \right) \neq 0$. Условие разрешимости функций $\psi_i(t,q,\tilde{p})$ относительно $\tilde{p}$ выполнены, поскольку исходные интегралы и есть это решение. ***Теорема доказана***

При специальной структуре функции Гамильтона полный интеграл можно искать в виде суммы $S = S_o(t) + \sum_{i=1}^{n} S_i\left(t, q^i\right)$. Отметим эти случаи:

$$\alpha. \qquad H = H\left[t, f_1\left(q^1, p_1\right), \ldots, f_n\left(q^n, p_n\right)\right],$$

$$\beta. \qquad H = f_n\left\{\ldots f_3\left\langle f_2\left[f_1\left(q^1, p_1\right), q^2, p_2\right], q^3, p_3\right\rangle \ldots q^n, p_n\right\},$$

$$\gamma. \qquad H = f(t) \frac{\sum_{s=1}^{n} f_s\left(q^s, p_s\right)}{\sum_{k=1}^{n} g_k\left(q^k, p_k\right)}.$$

В первом случае каждая функция $f_s\left(q^s, p_s\right) = \tilde{p}_s$ есть интеграл: $\left(f_s H\right) \equiv 0$; все интегралы находятся в инволюции по отношению друг к другу и $S_o = -\int H\left(t, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n\right) dt, \quad S_i = \int \psi_i\left(q^i, \tilde{p}_i\right) dq^i$.

Во втором случае также имеем n интегралов в инволюции $f_s\left(q^s, p_s, \tilde{p}_{s-1}\right) = \tilde{p}_s$ и $S_o = -\tilde{p}_n t, \quad S_i = \int \psi_i\left(q^i, \tilde{p}_i\right) dq^i$

В третьем случае, полагая $S_o = -h\int f(t)dt$, получаем

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{n} f\left(q^s, p_s\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} g\left(q^s, p_s\right)} = h \quad \rightarrow \quad \sum_{s=1}^{n} f\left(q^s, p_s\right) - h\sum_{k=1}^{n} g\left(q^s, p_s\right) = 0.$$

Каждая разность $f\left(q^s, p_s\right) - hg\left(q^s, p_s\right) = \tilde{p}_s$ является интегралом, что проверяется вычислением скобок Пуассона. Однако не все константы $\tilde{p}_s$ являются независимыми так как $\sum\limits_{s=1}^{n} \tilde{p}_s = 0$, например, $\tilde{p}_n = -\sum\limits_{s=1}^{n-1} \tilde{p}_s$. Далее полный интеграл формируется обычным образом $S_i = \int \psi_i\left(q^i, \tilde{p}_i, h\right) dq^i$, $S_n = \int \psi_n\left(q^n, -\sum\limits_{s=1}^{n-1} \tilde{p}_s, h\right) dq^n$

2. Коснемся вопроса о переменных действие-угол для системы с разделяющимися переменными. Вместо постоянных α_i вводят величины $I_k = \frac{1}{2\pi}\oint p_k dq^k = \frac{1}{2}\oint \frac{\partial S}{\partial q^k} dq^k$, где интеграл берется по полному циклу периодического движения. В результате получаем систему выражений $I_k = I_k(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Величины I_k можно принять за новые импульсы вместо α_k. Тогда $\alpha_k = f_k\left(I_1,...,I_n\right), \quad k = \overline{1,n}$ и функция $S(q, \alpha(I))$ задает унивалентное каноническое преобразование от исходных переменных к переменным действие-угол. Новая функция Гамильтона имеет вид $H = H(I)$. Все координаты, соответствующие новым импульсам являются циклическими.

Пример. В функции Гамильтона для гармонического осциллятора перейти к переменным действие угол.

Из выражения $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) = h$ имеем $p = \pm\sqrt{2h - \omega^2 q^2}$. В интеграле $I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2h - \omega^2 q^2}\, dq$ сделаем замену $q = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin x$. В результате получим $I = \frac{h}{\pi\omega}\int\limits_{o}^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{h}{\omega}$, то есть $h = I\omega$. Само преобразование определяется производящей функцией $S = \int \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}\, dq$, из которого имеем

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \int \frac{\omega dq}{\sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2I}} dq}{\sqrt{1 - \frac{\omega}{2I} q^2}} = \arcsin\sqrt{\frac{\omega}{2I}} q = \varphi \quad \rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2} = \sqrt{2I\omega}\cos\varphi = p \quad \rightarrow \quad H = I\omega.$$