

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Г.Н. Яковенко

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ**

**УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ,
ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА**

Электронная версия от 28.03.2003

Москва 2003

Рецензенты:
кафедра теоретической механики
Казанского государственного университета

д.ф.-м.н. В.В. Сидоренко

Включены следующие разделы теоретической механики: равновесие, устойчивость положения равновесия консервативной системы, малые колебания консервативной системы, асимптотическая устойчивость, гамильтонова механика, канонические преобразования, уравнение Гамильтона-Якоби.

Предназначено для студентов второго курса Московского физико-технического института и соответствует программе второго семестра двухсеместрового курса лекций по теоретической механике.

Последнюю редакцию книги можно найти на www.study.com.ru.

О всех замеченных опечатках и неточностях, пожалуйста, сообщайте по адресу feedback@study.com.ru.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава I. Равновесие	
§ 1. Определение положения равновесия	7
§ 2. Критерий равновесия стационарно заданной системы ..	9
§ 3. Потенциальный случай. Принцип возможных перемещений. Условия равновесия твердого тела	12
Глава II. Устойчивость положения равновесия консервативной системы	
§ 4. Устойчивость по Ляпунову. Функции Ляпунова	19
§ 5. Теоремы Ляпунова и Четаева о характере устойчивости нулевого решения	22
§ 6. Устойчивость перманентных вращений свободного твердого тела	25
§ 7. Условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия консервативной системы	27
Глава III. Малые колебания консервативной системы	
§ 8. Постановка задачи о малых колебаниях	34
§ 9. Решение задачи о малых колебаниях	36
§ 10. Нормальные координаты	41
§ 11. Реакция консервативной системы на периодическое воздействие	44
§ 12. Случай нулевого корня в уравнении частот	46
Глава IV. Асимптотическая устойчивость	
§ 13. Теоремы Барбашина–Красовского и Ляпунова	48
§ 14. Устойчивость диссипативных систем	51
§ 15. Устойчивость линейных автономных систем	54

§ 16. Устойчивые многочлены. Критерии Рауса–Гурвица и Михайлова	57
§ 17. Устойчивость по линейному приближению	63
§ 18. Вынужденные движения автономной системы. Частотные характеристики	69
Глава V. Гамильтонова механика	
§ 19. Канонические уравнения Гамильтона	77
§ 20. Первые интегралы гамильтоновых систем. Теорема Якоби–Пуассона. Уравнения Уиттекера	80
§ 21. Принцип Гамильтона. Замена переменных в уравнениях Лагранжа	87
§ 22. Теорема Эмми Нётер	95
§ 23. Характер экстремума действия по Гамильтону	101
§ 24. Интегральные инварианты. Принцип Мопертюи–Лагранжа	118
§ 25. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема	131
§ 26. Теорема Ли Хуачжуна о совокупности универсальных интегральных инвариантов первого порядка	136
Глава VI. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби	
§ 27. Канонические преобразования: определение, основной критерий	143
§ 28. Варианты выбора независимых переменных в основном критерии	148
§ 29. Фазовый поток гамильтоновой системы — каноническое преобразование	159
§ 30. Следствия из основного критерия каноничности. Инволютивные системы	167
§ 31. Уравнение Гамильтона–Якоби	173

Введение

Теоретическая механика изучается студентами МФТИ год — в течение второго курса. Книга соответствует программе весеннего семестра и представляет собой перевод с «устного» на «письменный» читаемых автором лекций.

Объект обсуждения — конечномерная голономная механическая система с идеальными связями. Допустимые положения системы (конфигурации) взаимно однозначно связаны с наборами обобщенных координат $q = (q_1, \dots, q_n)$. Поведение $q(t)$ системы определяется уравнениями Лагранжа (лагранжевой системой)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (0.1)$$

Если обобщенные силы Q_i задаются потенциальной энергией Π , то уравнения (0.1) можно записать с использованием функции Лагранжа (лагранжиана) $L = T - \Pi$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (0.2)$$

Уравнения (0.2) могут определять движение не только таких систем, для которых выполняется $L = T - \Pi$. Например, движения одномерного линейного осциллятора с диссипацией удовлетворяют системе (0.2), заданной лагранжианом $L = (T - \Pi)e^{\alpha t}$. Далее изучаются произвольные системы (0.2) с единственным условием на функцию Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0. \quad (0.3)$$

Условие (0.3) обеспечивает возможность приведения системы (0.2) к нормальному виду: в левой части уравнений — производные первого порядка, в правой — функции от переменных.

Используются следующие названия для пространств:

1. координатное (конфигурационное) — n -мерное пространство с координатами q_1, \dots, q_n ;
2. расширенное координатное — с координатами t, q_1, \dots, q_n ;
3. фазовое (пространство состояний) — $2n$ -мерное с координатами $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (или с координатами $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, p_k$ — обобщенные импульсы);

4. расширенное фазовое — с координатами $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (или $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$).

Функции, участвующие в построениях, предполагаются достаточно гладкими.

Рассуждения, определения, утверждения — локальны: справедливы в некоторой области одного из указанных выше пространств.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00697) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

Г л а в а I. РАВНОВЕСИЕ

§ 1. Определение положения равновесия

Предполагаем, что механическая система содержит N материальных точек и ее состояние в некоторой системе отсчета определяется положением \mathbf{r}_i и скоростью \mathbf{V}_i каждой точки ($i = \overline{1, N}$). Предполагается, что система имеет n степеней свободы и динамика системы при некотором выборе обобщенных координат определяется уравнениями Лагранжа (0.1).

Определение 1.1. Пусть в начальный момент времени t_0 материальные точки, принадлежащие механической системе, находятся в положении \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$, а скорости точек равны нулю: $\mathbf{V}_i^0 = 0$, $i = \overline{1, N}$. Занимаемое положение называется **положением равновесия**, если точки системы при $t > t_0$ продолжают оставаться в этом положении: $\mathbf{r}_i(t) \equiv \mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1, N}$, т. е. скорости точек при $t > t_0$ попрежнему равны нулю.

Понятие равновесия существенно зависит от выбора системы отсчета. Пусть, например, одна инерциальная система отсчета перемещается относительно другой инерциальной поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{V} \neq 0$. Тогда положению равновесия в одной из систем отсчета в другой системе соответствует не положение равновесия, а поступательное движение механической системы с скоростью \mathbf{V} или $-\mathbf{V}$. Вопрос о нахождении положений равновесия корректен, если из постановки задачи ясно, в какой системе отсчета для точек системы должно выполняться $\mathbf{V}_i \equiv 0$.

Пусть для механической системы сделан конкретный выбор обобщенных координат, т. е. в каждый момент времени t разрешенным положениям точек системы взаимно однозначно ставится в соответствие набор значений обобщенных координат q_1, \dots, q_n : $\mathbf{r}_i(t, q)$, $i = \overline{1, N}$. Практически важен вопрос: каким условиям должны удовлетворять обобщенные координаты q и скорости \dot{q} , соответствующие положению равновесия? Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть механическая система стационарно задана, т. е. положения точек определяется только обобщенными координатами: $\mathbf{r}_i(q)$, $i = \overline{1, N}$, или выполняется

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i(t, q)}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.1)$$

Тогда имеет место эквивалентность

$$\{\mathbf{V}_i \equiv 0, i = \overline{1, N}\} \Leftrightarrow \{\dot{q}_k \equiv 0, k = \overline{1, n}\}. \quad (1.2)$$

□ Вследствие того, что система стационарно задана, справедлива формула

$$\mathbf{V}_i(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.3)$$

Доказательство \Leftarrow исчерпывается подстановкой в (1.3) $\dot{q}_k = 0$. Для доказательства \Rightarrow подставим в (1.3) $\mathbf{V}_i = 0$, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

или уравнение $\sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k \dot{q}_k = 0$, которое вследствие линейной независимости векторов

$$\mathbf{H}_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1(t, q)}{\partial q_k} \dots \frac{\partial \mathbf{r}_N(t, q)}{\partial q_k} \right\|$$

(см. определение обобщенных координат) приводит к нужному равенству $\dot{q}_k = 0, k = \overline{1, n}$. ■

Теорему 1.1 иллюстрирует следующий

Пример 1.1. Одномерное движение груза под действием пружины определяется «разумным» выбором обобщенной координаты x — расстоянием между грузом и неподвижной опорой (см. рис. 1.1).

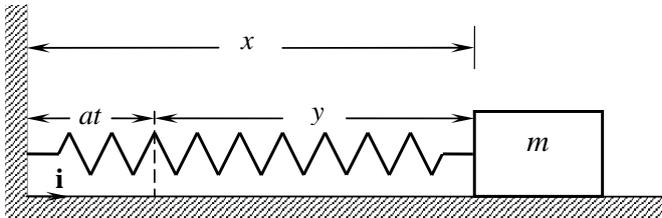


Рис. 1.1

Такой выбор влечет выражения:

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{i}x, \quad \mathbf{V}(x, \dot{x}) = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{i}}\dot{x}$$

($\mathbf{i} - \text{орт}$). Физически очевидному положению равновесия ($\mathbf{V} = \mathbf{i}\dot{x} = 0$) соответствуют значения: $x = l_0$, где l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии, $\dot{x} \equiv 0$. Не противоречит определению обобщенных координат «неразумный» выбор координаты y : $x = at + y$ ($a = \text{const}$, см. рис 1.1). Такой выбор влечет выражения:

$$\mathbf{r}(t, y) = \mathbf{i}(at + y), \quad \mathbf{V}(t, y, \dot{y}) = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}(a + \dot{y}),$$

а положению равновесия ($\mathbf{V} = \mathbf{i}(a + \dot{y}) \equiv 0$) соответствует путь в фазовом пространстве $R^2(y, \dot{y})$: $y = l_0 - at$, $\dot{y} = -a$.

Далее в этой главе рассматриваются исключительно стационарно заданные системы: разрешенное положение любой точки такой механической системы определяется значениями обобщенных координат

$$\mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = \overline{1, N},$$

и не зависит от момента времени t (см. (1.1)). Утверждение (1.2) теоремы 1.1 дает возможность сформулировать определение, эквивалентное для стационарно заданных систем определению 1.1.

Определение 1.2. Пусть некоторому положению \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$, стационарно заданной системы соответствует набор обобщенных координат q_k^0 , $k = \overline{1, n}$: $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(q^0)$, $i = \overline{1, N}$. Положение \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$, называется **положением равновесия**, если соответствующие системе уравнения Лагранжа имеют решение:

$$q_k(t) \equiv q_k^0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Определение 1.2 дает возможность для стационарно заданной системы отождествить три представления положения равновесия: расположение механической системы \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$ в системе отсчета; точку $q = q^0$ в координатном пространстве; точку $q = q^0$, $\dot{q} = 0$ в фазовом пространстве.

§ 2. Критерий равновесия стационарно заданной системы

Динамика стационарно заданной системы определяется обобщенными силами $Q_i(t, q, \dot{q})$ и кинетической энергией

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (2.1)$$

— в данном случае положительно определенной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей \dot{q}_i с коэффициентами $a_{ik}(q)$, независимыми явно от времени t . Подстановка функций $Q_i(t, q, \dot{q})$ и (2.1) в формулу (0.1) для уравнений Лагранжа приводит к системе следующего вида

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_i(t, q, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1 (критерий равновесия стационарно заданной системы). Положение q^0 ($\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(q^0)$) является положением равновесия стационарно заданной системы тогда и только тогда, когда для обобщенных сил $Q_i(t, q, \dot{q})$, $i = \overline{1, n}$, тождественно по времени t выполняются равенства

$$Q_i(t, q^0, 0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

□ Отметим две особенности уравнений (2.2). Во-первых, при подстановке в (2.2) постоянных q_k^0 , $i = \overline{1, n}$, левая часть обращается в нуль. Во-вторых, уравнения (2.2) разрешимы относительно вторых производных \ddot{q}_k , приводимы к нормальному виду и имеют при заданных начальных условиях q^0 , \dot{q}^0 единственное решение (см. оптимистическое предположение — все функции достаточно гладкие, — сделанное во введении). Вследствие этих двух особенностей у системы (2.2) есть решение $q(t) \equiv q^0$ (что по определению 1.2 соответствует положению равновесия) в том и только в том случае, если справедливо равенство (2.3). ■

Пример 2.1. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины l каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках O и A — цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила \mathbf{F} (см. рис. 2.1). Определить положения равновесия. Выбор обобщенных координат α , β — углов между стержнями и вертикалью — приводит к обобщенным силам и к уравнениям, определяющим по теореме 2.1 все положения равновесия:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\frac{3}{2} mgl \sin \alpha + Fl \cos(\alpha - \beta) = 0, \\ Q_\beta &= -\frac{1}{2} mgl \sin \beta + Fl = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

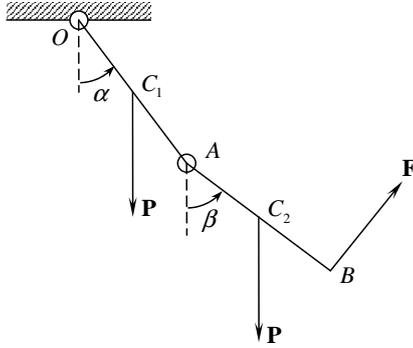


Рис. 2.1

Уравнения (2.4) преобразуются к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2F \cos \beta}{3mg - 2F \sin \beta} = f(\beta), \\ \sin \beta &= \frac{2F}{mg}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

из которой находятся в зависимости от параметров задачи все положения равновесия.

- $2F > mg$, положений равновесия нет.
- $2F = mg$, $\sin \beta = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, два положения равновесия (α_0, β_0) :

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right).$$

- $2F < mg$, система (2.5) имеет решения:

$$\beta_1 = \arcsin \left(\frac{2F}{mg} \right), \quad \beta_2 = \pi - \beta_1, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = f(\beta_{1,2}),$$

определяющие с учетом $f(\beta_1) = -f(\beta_2)$ четыре положения равновесия (α_0, β_0) :

$$(\alpha_1 = \operatorname{arctg} f(\beta_1), \beta_1); \quad (-\alpha_1, \pi - \beta_1); \quad (\pi + \alpha_1, \beta_1); \quad (\pi - \alpha_1, \pi - \beta_1).$$

На рис. 2.2 изображены четыре положения равновесия, соответствующие параметрам: $4F = mg$, $\alpha_1 \cong 9^\circ$, $\beta_1 = 30^\circ$. Отметим два обстоятельства. Во-первых, сила \mathbf{F} непотенциальна:

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \beta} \neq \frac{\partial Q_\beta}{\partial \alpha},$$

поэтому условие (3.1) приведенной в § 3 теоремы 3.1 к рассматриваемой системе не применимо. Во-вторых, если использовать традиционные условия статики (3.3), (3.4) (см. приведенную в § 3 теорему 3.3), то к неизвестным α и β добавятся еще четыре скалярных неизвестных, задающих реакции \mathbf{R}_O и \mathbf{R}_A в шарнирах, поэтому уравнений для определения положений равновесия потребуется шесть, а не два, как в случае применения теоремы 2.1.

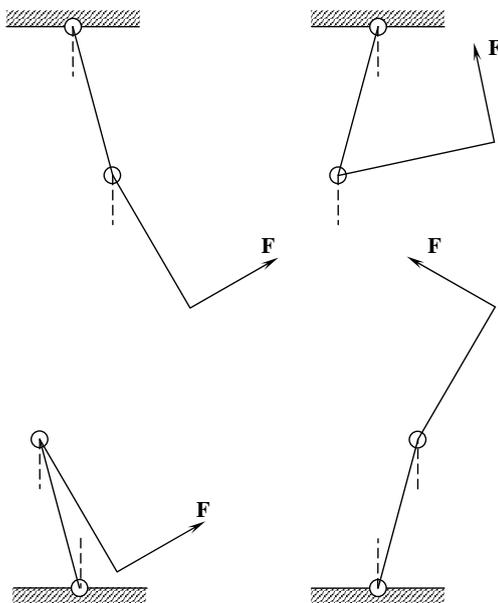


Рис. 2.2

§ 3. Потенциальный случай. Принцип возможных перемещений. Условия равновесия твердого тела

В этом параграфе формулируется несколько теорем — следствий из теоремы 2.1.

Теорема 3.1. Пусть все силы, действующие на механическую систему, потенциальны и определяются потенциальной энергией $\Pi(t, q)$. Тогда положение q^0 стационарно заданной системы является положением равновесия в том и только в том случае, если в этом положении выполняется

$$\left. \frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q_k} \right|_{q=q^0} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.1)$$

т. е. в положении q^0 потенциальная энергия принимает стационарное значение.

□ Доказательство исчерпывается утверждением теоремы 2.1 и формулой

$$Q_k(t, q) = -\frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q_k}, \quad k = \overline{1, n}. \quad \blacksquare$$

Пример 3.1. В отличие от двойного маятника, рассмотренного в примере 2.1, в этом примере постоянная по величине сила \mathbf{F} , приложенная в точке B стержня AB , — горизонтальна (рис. 3.1).

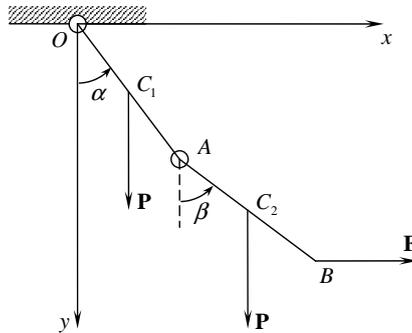


Рис. 3.1

Силам соответствуют потенциальная энергия

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta) &= -mg(y_{C_1} + y_{C_2}) - Fx_B = \\ &= -mg\frac{l}{2}(3 \cos \alpha + \cos \beta) - Fl(\sin \alpha + \sin \beta). \end{aligned}$$

Условие равновесия (3.1) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= mg\frac{l}{2}3 \sin \alpha - Fl \cos \alpha = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} &= mg\frac{l}{2} \sin \beta - Fl \cos \beta = 0 \end{aligned}$$

или — к эквивалентной системе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F}{3mg}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2F}{mg},$$

решение которой определяет четыре положения равновесия

$$\left(\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{2F}{3mg}, \beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{2F}{mg}\right), \quad (\alpha_1, \pi + \beta_1),$$

$$(\pi + \alpha_1, \beta_1), \quad (\pi + \alpha_1, \pi + \beta_1).$$

На рис. 3.2 изображены четыре положения равновесия, соответствующие таким же, как в примере 2.1 параметрам $4F = mg$, для которых выполняется:

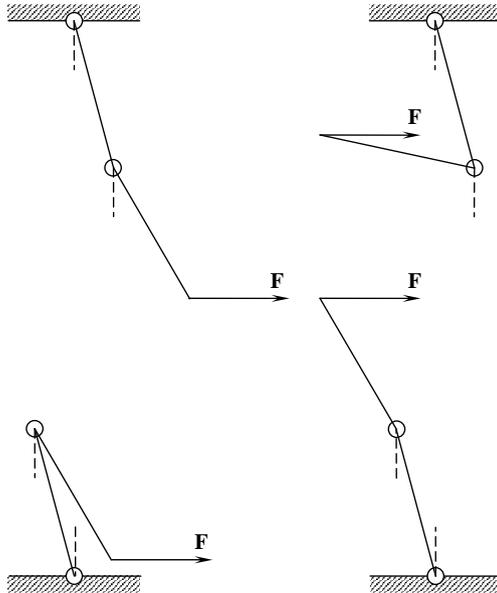


Рис. 3.2

В отличие от примера 2.1 в данном случае при любых значениях F, l, m , и g двойной маятник имеет четыре положения равновесия, качественно совпадающих с изображенными на рис. 3.2, в частности, всегда выполняется $\alpha_1 < \beta_1$.

Пример 3.2 Концы гибкой нерастяжимой, однородной нити длины l закреплены в вертикальной плоскости (рис. 3.3). Найти форму равновесия нити.

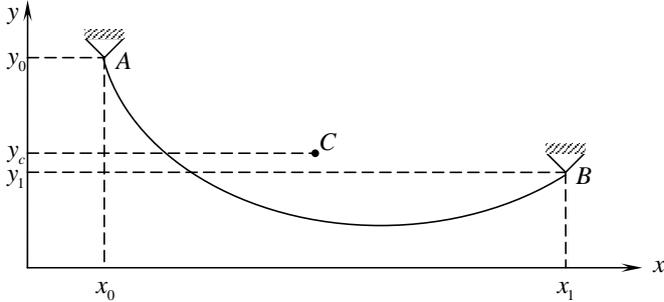


Рис. 3.3

Потенциальная энергия сил тяжести, действующих на нить, определяется высотой центра инерции нити

$$\Pi = mgy_C = g \int_{x_0}^{x_1} y(x) dm = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y(x) ds.$$

Учет соотношения для дифференциала дуги ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx^2 = \left\{ 1 + (y')^2 \right\} dx^2$$

приводит к функционалу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

который каждой форме $y(x)$ нити ставит в соответствие значение потенциальной энергии $\Pi = \rho g I$. Допустимы только такие формы нити, которым соответствует заданная длина l , т. е. должно выполняться условие

$$I_0 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l.$$

Из вариационного исчисления известно, что, если кривая $y(x)$ при соблюдении условия $I_0 = l$ доставляет функционалу I стационарное значение, т. е. выполняется условие равновесия (3.1), то кривая $y(x)$ есть решение уравнения Эйлера (ср. с уравнениями Лагранжа (0.2))

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где $f(y, y') = (y + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}$ — подынтегральное выражение в функционале $I + \lambda I_0$, λ — множитель Лагранжа. Доказывается в общем виде (см. теорему 20.4), что следствием условия $\partial f / \partial x = 0$ является первый интеграл

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = C^2$$

уравнения Эйлера. Подстановка $f(y, y') = (y + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}$ в первый интеграл и очевидные преобразования приводят к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y - \lambda)^2 - C^2}$$

с разделяющимися переменными и к его решению

$$y = C \operatorname{ch} \left(\frac{x}{C} + b \right) - \lambda.$$

Три постоянные λ , C , b вычисляются по заданным граничным условиям и длине l нити

$$y_0 = C \operatorname{ch} \left(\frac{x_0}{C} + b \right) - \lambda,$$

$$y_1 = C \operatorname{ch} \left(\frac{x_1}{C} + b \right) - \lambda,$$

$$I_0 = C \left\{ \operatorname{sh} \left(\frac{x_1}{C} + b \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{x_0}{C} + b \right) \right\} = l.$$

Показывается, что при естественном предположении

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \leq l^2,$$

постоянные λ , C , b находятся единственным образом.

Теорема 3.2 (принцип возможных перемещений). *Положение \mathbf{r}_i^0 , $i = \overline{1, N}$ (q_k^0 , $k = \overline{1, n}$) стационарно заданной системы является положением равновесия тогда и только тогда, когда на любом возможном перемещении $d\mathbf{r}_i$, $i = \overline{1, N}$ ($\forall dq_k$, $k = \overline{1, n}$) из положения \mathbf{r}_i^0 для элементарной работы δA действующих на систему сил \mathbf{F}_i выполняется*

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^n Q_k(t, q_0, 0) dq_k = 0. \quad (3.2)$$

□ В силу независимости обобщенных координат у системы есть следующие перемещения из положения q^0 :

$$dq_l \neq 0, dq_k = 0, k \neq l.$$

Следствием этого факта является эквивалентность соотношений (2.3) и (3.2). ■

Теорема 3.2 позволяет обосновать традиционные уравнения статики для равновесия твердого тела.

Теорема 3.3. *Твердое тело находится в положении равновесия тогда и только тогда, когда для главного вектора \mathbf{R} и главного момента \mathbf{M}_0 действующих на тело сил \mathbf{F}_i выполняется*

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = 0, \quad (3.4)$$

где O — произвольная точка, а \mathbf{r}_i — вектор, проведенный из точки O к точке приложения силы \mathbf{F}_i .

□ Входящее в условие равновесия (3.2) возможное перемещение $d\mathbf{r}_i$ для твердого тела представляется следующим образом

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{V}_i dt = (\mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i]) dt,$$

где \mathbf{V}_0 — скорость точки O , $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость тела. С учетом этого представления условие равновесия (3.2) принимает вид (ис-

пользована возможность в смешанном произведении циклически перемещать сомножители)

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \left\{ \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, \mathbf{V}_0) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i]) \right\} dt = \\
 &= \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \mathbf{V}_0 \right) + (\boldsymbol{\Omega}, \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]) \right\} dt = \\
 &= \{(\mathbf{R}, \mathbf{V}_0) + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}_0)\} dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Так как для твердого тела произвольность возможных перемещений $d\mathbf{r}_i$ принадлежащих телу точек эквивалентна произвольности векторов \mathbf{V}_0 и $\boldsymbol{\Omega}$, из условия равновесия (3.5) следуют требуемые равенства (3.3) и (3.4). ■

Г л а в а II. **УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ
РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ
СИСТЕМЫ**

§ 4. Устойчивость по Ляпунову. Функции Ляпунова

Система уравнений Лагранжа вследствие (0.3) разрешима относительно старших производных, вследствие чего представима в нормальном виде. В этой главе рассматриваются только автономные (стационарные) системы ($\partial\varphi(x)/\partial t = 0$):

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^m, \quad (4.1)$$

где переменные x_1, \dots, x_m — результат объединения обобщенных координат q и обобщенных скоростей \dot{q} . Далее многие определения и утверждения формулируются для системы (4.1) с ориентацией на очевидное с учетом $x = (q, \dot{q})$ переформулирование для уравнений Лагранжа. Введем обозначение для общего решения системы (4.1)

$$x(t) = f(t, x_0). \quad (4.2)$$

Для начального момента времени полагаем $t_0 = 0$, поэтому для (4.2) справедливо равенство

$$x(0) = f(0, x_0) = x_0. \quad (4.3)$$

Используемое далее групповое свойство общего решения (4.2) вводит

Теорема 4.1. *Общее решение $x(t) = f(t, x_0)$ автономной системы (4.1) при любых числах t, t_2, x_0 удовлетворяет равенству*

$$f(t, f(t_2, x_0)) = f(t + t_2, x_0). \quad (4.4)$$

□ Пусть в (4.4) t — независимая переменная, а t_2 — фиксированный параметр. Так как $f(t, x_0)$ — решение системы (4.1) при любых числах x_0 , то левая часть равенства (4.4) также решение. Замена независимой переменной $\tilde{t} = t + t_2$ в системе (4.1) и в правой части равенства (4.4) приводит к системе с такой же правой частью, как и у (4.1) (система (4.1) — автономна!), и к выводу, что правая часть равенства (4.4) — решение системы (4.1). Вследствие (4.3) при

$t = 0$ функции в левой и правой частях равенства (4.4) совпадают, а два решения системы (4.1) с одинаковыми начальными данными должны совпадать при любом значении t . ■

Равенство (4.4) показывает, что семейство преобразований $f(t, x_0)$ пространства R^m является группой. Во-первых, суперпозиция двух преобразований с параметрами t и t_2 не выводит из семейства (см. (4.4)), во-вторых, семейство при $t = 0$ содержит тождественное преобразование (см. (4.3)), в третьих, для каждого преобразования с параметром t_2 найдется обратное с параметром $t = -t_2$ (см. (4.3) и (4.4)).

Предполагается, что для правой части системы (4.1) выполняется

$$\varphi(0) = 0, \quad (4.5)$$

т. е. $x(t) \equiv 0$ — решение системы (4.1).

Определение 4.1. Нулевое решение $x(t) = 0$ системы (4.1) устойчиво по Ляпунову, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |x_0| = |x(0)| < \delta)(\forall t > 0) |x(t)| = |f(t, x_0)| < \varepsilon.$$

Другими словами, для устойчивого нулевого решения требования, чтобы любое решение $x(t)$ не покинуло сколь угодно малую ε -окрестность положения $x = 0$, можно удовлетворить, ограничив ($|x(0)| < \delta$) начальные данные.

Определение 4.1 есть определение непрерывности вектор-функции $x(t) = f(t, x_0)$ в точке $x_0 = 0$ по переменным x_0 равномерно по переменной $t \geq 0$. При известном общем решении $f(t, x_0)$ исследование на непрерывность, а значит и на устойчивость, можно проводить, используя всю мощь аппарата математического анализа. Основной задачей теории устойчивости является следующая: вынести суждение о характере устойчивости нулевого решения, располагая информацией (иногда и неполной) только о правых частях системы (4.1).

Следствием определения 4.1 является

Определение 4.2. Нулевое решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво по Ляпунову, если

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists |x_0| < \delta)(\exists t_1 > 0) |x(t_1)| = |f(t_1, x_0)| \geq \varepsilon.$$

В формулировках и доказательствах приведенных ниже теорем используются **функции Ляпунова** $V(x)$. Они определены в некоторой Δ -окрестности нулевого решения: $|x| < \Delta$; для $V(x)$ предполагается

$$V(0) = 0; \quad (4.6)$$

производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (4.1) есть функция, вычисленная следующим образом

$$W(x) = \dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x).$$

Функция $V(x)$ называется **положительно определенной** (обозначается $V(x) > 0$), если выполняется

$$\{0 < |x| < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) > 0\}, \quad (4.7)$$

если же

$$\{0 < |x| < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) < 0\} \quad (4.8)$$

— **отрицательно определенной** (обозначается $V(x) < 0$). При выполнении одного из условий (4.7) или (4.8) функция $V(x)$ называется **знакоопределенной**. В ослабленном варианте —

$$\{0 < |x| < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) \geq 0\}$$

(**положительно постоянная функция**, обозначается $V(x) \geq 0$) или

$$\{0 < |x| < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) \leq 0\}$$

(**отрицательно постоянная функция**, обозначается $V(x) \leq 0$) — функция $V(x)$ называется **знакопостоянной**. Если же функция $V(x)$ принимает в Δ -окрестности как положительные, так и отрицательные значения, она называется **знакопеременной**.

Например, в пространстве $R^2(x, y)$ в любой Δ -окрестности функция $V = x^2 + y^4$ — положительно определена; функция $V = x^2$ — положительно постоянна ($V = 0$ при $x = 0, y \neq 0$), функция $V = x^2 - y^4$ — знакопеременная.

§ 5. Теоремы Ляпунова и Четаева о характере устойчивости нулевого решения

Теорема 5.1 (А.М. Ляпунов). Пусть в Δ -окрестности нулевого решения системы (4.1) существует положительно определенная функция Ляпунова

$$V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (4.1) отрицательно постоянна

$$W(x) = \dot{V}(x) \leq 0. \quad (5.2)$$

Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

□ Рассмотрим в Δ -окрестности произвольную ε -окрестность (рис. 5.1). На границе Γ ε -окрестности ($|x| = \varepsilon \neq 0$), во-первых, вследствие (5.1) выполняется $V(x) > 0$, во-вторых, так как граница является замкнутым ограниченным множеством, то по теореме Вейерштрасса существует точка $x^* \in \Gamma$, на которой ограниченная снизу функция $V(x) \geq 0$ достигает минимума, т. е. справедливо

$$\{x \in \Gamma\} \Rightarrow \{V(x) \geq V(x^*) = V^* > 0\}. \quad (5.3)$$

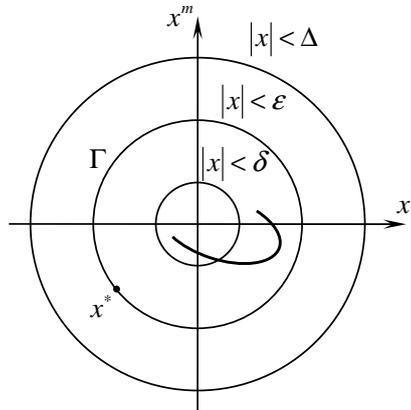


Рис. 5.1

Вследствие (4.6) и непрерывности функции $V(x)$ существует такая δ -окрестность, что выполняется

$$\{|x_0| < \delta\} \Rightarrow \{V(x_0) < V^*\}. \quad (5.4)$$

Изучим поведение функции $V(f(t, x_0))$ на решении, соответствующем произвольной начальной точке x_0 , принадлежащей δ -окрестности. Из неравенства (5.2) следует $\dot{V}(f(t, x_0)) = W(f(t, x_0)) \leq 0$, т. е. при $t > 0$ с учетом (14.3) и (5.4) выполняется

$$V(f(t, x_0)) \leq V(f(0, x_0)) = V(x_0) < V^*. \quad (5.5)$$

Предположение о том, что траектория $f(t, x_0)$ покинет ε -окрестность, т. е. в некоторый момент времени $t_1 > 0$ выполнится $x_1 = f(t_1, x_0) \in \Gamma$, приводит к противоречию. Действительно, с одной стороны, из (5.3) следует $V(x_1) \geq V(x^*)$, с другой стороны, из (5.5) следует $V(x_1) < V^*$. Таким образом, удовлетворены все требования определения 4.1 устойчивости по Ляпунову: для сколь угодно малой ε -окрестности строится такая δ -окрестность, что любое решение с начальными данными из δ -окрестности не покидает ε -окрестность. ■

Теорема 5.2 (Н.Г. Четаев). Пусть в ε -окрестности фазового пространства существует область M (∂M — граница M), в которой при некотором числе k для функции $V(x)$ выполняется:

1. $0 < V(x) \leq k$;
2. $W(x) = \dot{V}(x) > 0$;
3. $\{V(x) \geq V_0\} \Rightarrow \{\exists l > 0, W(x) \geq l > 0\}$;
4. $\{x = 0\} \in \partial M$;
5. $\{x \in \partial M, |x| < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

□ В силу 4

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in M)V(x_0) > 0. \quad (5.6)$$

Предположим, что решение с начальными данными $x(0) = x_0$ не покидает множества M : $x(t) = f(t, x_0) \in M$. Вследствие 2 выполняется

$$V(x(t)) \geq V(x_0) = V_0 > 0, \quad (5.7)$$

а в силу 3

$$W(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \geq l > 0.$$

С учетом 1 приходим к выводу, что пока решение $x(t)$ остается в области M должно выполняться

$$k \geq V(x(t)) = V_0 + \int_0^t \dot{V}(x(t)) dt \geq V_0 + lt,$$

т. е. в некоторый момент $t_1 \leq (k - V_0)/l$ решение $x(t)$ покидает область M . Но так как вследствие 5 с учетом (5.7) уход не может состояться через часть границы $\{\partial M, |x| < \varepsilon\}$, то решение покидает ε -окрестность. ■

Следующие две теоремы следуют из теоремы 5.2, но доказаны были значительно ранее.

Теорема 5.3 (А.М. Ляпунов). Пусть в ε -окрестности для производной в силу системы (4.1) от некоторой функции $V(x)$ справедливо

$$2'. W(x) = \dot{V}(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

и в ε -окрестности существует область M , в которой выполняется (сохранена нумерация условий теоремы 5.2):

1. $0 < V(x) \leq k$;
4. $\{x = 0\} \in \partial M$;
5. $\{x \in \partial M, |x| < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

□ Требуется обосновать недостающие условия 2 и 3 теоремы 5.2. Условие 2' выполняется всюду в ε -окрестности, т. е. условие 2 теоремы 5.2 выполнено. Вследствие 4 справедливо (5.6), а для решения с начальными данными $x(0) = 0$ в силу 2' выполняется (5.7). Для непрерывной функции $V(x)$ вследствие $V(0) = 0$ существует такая δ_1 -окрестность, что выполняется $\{|x| < \delta_1\} \Rightarrow \{V(x) \leq V_0\}$, что в сравнении с (5.7) приводит к выводу: пока решение $x(t)$ не покинуло ε -окрестность для него выполняется условие

$$\delta_1 \leq |x| < \varepsilon,$$

из которого с учетом 2' следует условие 3 теоремы 5.2. Все условия теоремы 5.2 выполнены. ■

Теорема 5.4 (А.М. Ляпунов). Если в теореме 5.3 сохранить условия 1, 4 и 5., а условие 2' заменить условием

$$2''. W(x) = \dot{V}(x) = cV(x) + U(x),$$

где $c > 0, U(x) \geq 0$, то решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

□ Из 2'' следует неравенство $W(x) = \dot{V}(x) \geq cV(x)$, которое влечет выполнение в области M ($V(x) > 0$) условий 2 и 3 теоремы 5.2. ■

§ 6. Устойчивость перманентных вращений свободного твердого тела

Как было сказано в начале главы II, уравнения Лагранжа есть частный случай систем дифференциальных уравнений, представимых в виде (4.1). Применим теорему 5.1 к системе, к которой явно уравнения Лагранжа не сводятся (хотя бы из-за нечетности порядка).

Пример 6.1. Динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

определяющие движение твердого тела с неподвижной точкой при отсутствии моментов внешних сил — замкнутая система для определения проекций p, q, r угловой скорости на главные оси инерции, A, B, C — моменты инерции тела относительно главных осей инерции. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, система (6.1) имеет два первых интеграла (энергии и момента импульса)

$$\begin{aligned} 2T &= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \\ K_0^2 &= A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

У системы (6.1) есть решение

$$p = \omega, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

соответствующее вращению тела вокруг первой главной оси с постоянной угловой скоростью ω (перманентное вращение). Сдвиг переменных $p = x + \omega, q = y, r = z$ приводит к тому, что в новых переменных перманентному вращению соответствует нулевое решение $x = 0, y = 0, z = 0$. Первые интегралы (6.2) в переменных x, y, z принимают вид

$$\begin{aligned} U_1 &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \\ U_2 &= A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2A^2\omega x \end{aligned} \tag{6.3}$$

— отброшены постоянные $A\omega^2$ и $A^2\omega^2$. Стандартный прием в теории функций Ляпунова — сформировать из первых интегралов положительно определенную в некоторой Δ -окрестности функцию $V = f(U_1, U_2)$, для которой второе условие (5.2) теоремы 5.1 выполняется автоматически: $\dot{V} \equiv 0$. Естественной попыткой является следующая:

$$V(x, y, z) = U_1^2 + U_2^2. \quad (6.4)$$

Знакопостоянство ($V \geq 0$) — очевидно, остается обосновать требование

$$\{V = 0\} \Rightarrow \{x = 0, y = 0, z = 0\},$$

приводящее с учетом $W = \dot{V} \equiv 0$ к выполнению обоих условий (5.1), (5.2) теоремы 5.1. Из $V = 0$ следует (см. (6.4)) $U_1 = 0, U_2 = 0$, что влечет равенство (см. (6.3))

$$AU_1 - U_2 = B(A - B)y^2 + C(A - C)z^2 = 0,$$

которое при выполнении одного из условий

$$A > B \geq C, \quad A < B \leq C \quad (6.5)$$

(вращение происходит вокруг минимальной или максимальной оси эллипсоида инерции) эквивалентно равенствам $y = 0, z = 0$, а с учетом $U_1 = 0$ — дополнительному равенству (см. (6.3))

$$U_1 = Ax(x + 2\omega) = 0,$$

приводящему при $|x| < 2\omega$ к равенству $x = 0$.

Окончательно: при выполнении одного из условий (6.5) функция (6.4) является положительно определенной в 2ω -окрестности ($x^2 + y^2 + z^2 < 4\omega^2$), оба условия (5.1) и (5.2) теоремы 5.1 выполнены, т. е. перманентное вращение вокруг одной из экстремальных осей эллипсоида инерции устойчиво.

Следует заметить, что уравнения Эйлера (6.1) и вывод об устойчивости справедливы для абсолютно твердого и абсолютно свободного тела. Уже на заре космической эры было замечено, что стабилизация при помощи перманентных вращений требует осторожного подхода. Так, запущенный в 1958 году спутник «Эксплорер-1», стабилизированный вращением вокруг оси с наименьшим моментом

инерции, «кувыркнулся». Виновником этого явления считаются изгибные колебания поперечных антен (спутник — не твердое тело), сопровождавшиеся диссипацией энергии. Теоретические исследования «эффекта кувыркания» привели к правилу «большой оси», согласно которому при стабилизации вращением спутник должен вращаться относительно оси, соответствующей максимальному моменту инерции¹.

Покажем, что перманентное вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчиво. Для определенности предположим, что вращение происходит с угловой скоростью $\omega > 0$. В ε -окрестности ($\varepsilon = \omega$) в качестве используемой в теоремах 5.2 — 5.4 области M рассмотрим

$$M = \{x^2 + y^2 + z^2 < \omega^2, y > 0, z > 0\}.$$

Для функции $V = yz$ выполнены условия 1, 4, 5 теоремы 5.2. Вычисления на основе (6.1) приводят к результату

$$W = \dot{V} = (x + \omega) \left(\frac{C - A}{B} z^2 + \frac{A - B}{C} y^2 \right),$$

из которого следует, что при выполнении одного из условий

$$C > A \geq B, \quad C \geq A > B$$

выполняются оставшиеся условия 2 и 3 теоремы 5.2, следовательно вращение неустойчиво, т. е. существуют такие сколь угодно малые начальные данные, что соответствующее решение покинет за конечное время ω -окрестность.

§ 7. Условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Динамику консервативной системы полностью характеризуют кинетическая

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \begin{cases} = 0, & |\dot{q}| = 0, \\ > 0, & |\dot{q}| \neq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

¹см. с.158-159: Докучаев Л.В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата. М.: ВИНТИ, 1982 (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика:Т.5)

и потенциальная $\Pi(q)$ энергии. Изучается устойчивость конкретного положения равновесия q^0 , для которого предполагается

$$q^0 = 0. \quad (7.2)$$

Разложение потенциальной энергии в окрестности $q^0 = 0$

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \Big|_{q^0=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \Big|_{q^0=0} q_i q_k + \dots$$

начинается с слагаемых не менее, чем второго порядка

$$\Pi(q) = \Pi_2(q) + \Pi_3(q) + \dots \quad (7.3)$$

($\Pi_k(q)$ — форма порядка k). Действительно, во-первых, предположение

$$\Pi(0) = 0 \quad (7.4)$$

не искажает информацию о системе, во-вторых, по теореме 3.1 в положении равновесия выполняется $\partial \Pi(0)/\partial q_i = 0$, что приводит к результату $\Pi_1(q) = 0$.

Как отмечалось в § 4, все определения и утверждения, сделанные для системы (4.1) в нормальной форме в координатах x , отождествлением $x = (q, \dot{q})$ переносятся на лагранжевы системы. Например, определение 4.1 устойчивости переформулируется в лагранжевых переменных следующим образом.

Определение 7.1. *Положение равновесия $q^0 = 0$ называется устойчивым по Ляпунову, если выполняется*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |q^0| < \delta)(\forall |\dot{q}^0| < \delta)(\forall t > 0) |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon.$$

Аналогично переформулируется определение 4.2 неустойчивости.

Отметим, что положению равновесия для механической системы соответствует с учетом (7.2) начало координат в фазовом пространстве $R^{2n}(q, \dot{q})$ под ε -окрестностью подразумевается в зависимости от контекста окрестность начала координат в фазовом или координатном пространстве.

Для консервативной системы ставится

Задача Лагранжа. Исходя из свойств потенциальной энергии $\Pi(q)$, сделать вывод о характере устойчивости положения равновесия консервативной системы.

Любой результат в рамках задачи Лагранжа носит следующий характер: если функция $\Pi(q)$ обладает определенными свойствами, то положение равновесия устойчиво (неустойчиво) при любой кинетической энергии, удовлетворяющей свойству (7.1).

Теорема 7.1 (Ж. Лагранж, Л. Дирихле). Пусть в некоторой Δ -окрестности координатного пространства $R^n(q)$ потенциальная энергия $\Pi(q)$ имеет в положении (7.2) строгий минимум, т. е. с учетом (7.4) при $|q| < \Delta$ выполняется

$$\Pi(q) \begin{cases} = 0, & |q| = 0, \\ > 0, & |q| \neq 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Тогда $q^0 = 0$ — устойчивое по Ляпунову положение равновесия.

□ Из (7.5) следует $\partial\Pi(0)/\partial q_i = 0$, т. е. по теореме 3.1 $q^0 = 0$ — положение равновесия. Доказательство его устойчивости следует из теоремы 5.1, если в качестве функции Ляпунова V принять полную энергию $V = E = T + \Pi$. Требование (5.1) теоремы 5.1 выполнено вследствие условий (7.1) и (7.5):

$$V = E = T + \Pi = \begin{cases} = 0, & |q| + |\dot{q}| = 0, \\ > 0, & |q| + |\dot{q}| \neq 0; \end{cases}$$

а требование (5.2) — вследствие закона сохранения $W = \dot{V} = \dot{E} = 0$. ■

Условие (7.5) — достаточное условие устойчивости. Как показывает следующий (несколько экзотичный) пример, из факта устойчивости не следует (7.5) — строгий минимум потенциальной энергии.

Пример 7.1. Точка массы m находится в гладком «многоямном ущелье», определенном $(2n - 1)$ раз непрерывно дифференцируемой функцией $y = x^{2n} \sin^2(1/x^2)$, y — вертикаль, x — горизонталь (рис 7.1).

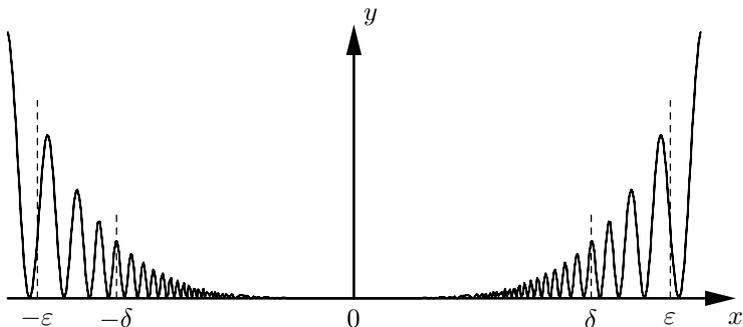


Рис. 7.1

Из постановки задачи видно, что для любой ε -окрестности, найдется такая «ямка» вблизи начала координат, что при соответствующем ограничении на скорость эту «ямку» точке не преодолеть, т. е. нулевое положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Потенциальная же энергия $P(x) = mgx^{2n} \sin^2(1/x^2)$ в любой Δ -окрестности дополнительно к $x_0 = 0$ обращается в нуль при $x_1 = 1/\sqrt{\pi n}$, где n — такое натуральное число, чтобы выполнялось $x_1 < \Delta$. Таким образом устойчивость есть, а требование (7.5) теоремы 7.1 нарушено.

Приведем без доказательства несколько достаточных условий неустойчивости положения равновесия. Как и ранее, предполагается, что в положении равновесия выполняются равенства (7.2) и (7.4). В формулировках используется вид (7.3) разложения $P(q)$ в окрестности $q^0 = 0$.

Теорема 7.2 (А.М. Ляпунов). Пусть в некотором положении q^1 системы выполняется

$$P_2(q^1) < 0, \quad (7.6)$$

где P_2 — совокупность слагаемых в (7.3) второго порядка. Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Условие (7.6) теоремы 7.2 допускает следующую эквивалентную формулировку: в положении равновесия у потенциальной энергии отсутствует минимум (в том числе и нестрогий), и этот факт обнаруживается по слагаемым второго порядка в разложении (7.3). Отсутствие минимума следует из (7.6): для квадратичной формы P_2 справедливо $P_2(aq^1) = a^2 P_2(q^1)$, поэтому в любой окрестности найдется положение aq^1 , для которого выполняется $P(aq^1) < 0$.

Теорема 7.3 (А.М. Ляпунов). Пусть Π_m — совокупность слагаемых в разложении (7.3) наименьшей степени $m \geq 2$ и в Δ -окрестности выполняется

$$\Pi_m(q) \begin{cases} = 0, & |q| = 0, \\ < 0, & |q| \neq 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Эквивалентная формулировка условия (7.7): положение равновесия

$$q^0 = 0$$

— строгий максимум функции $\Pi(q)$, и этот факт обнаруживается по слагаемым наименьшей степени m в разложении (7.3).

Теорема 7.4 (Н.Г. Четаев). Пусть потенциальная энергия $\Pi(q)$ является однородной функцией, и в положении q^1 системы выполняется

$$\Pi(q^1) < 0,$$

(отсутствие минимума, включая нестрогий). Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Как и в условиях теоремы 7.2, отсутствие минимума следует из однородности функции $\Pi(q)$: $\Pi(aq^1) = a^k \Pi(q^1)$.

Пример 7.2. Приведем несколько примеров потенциальных энергий $\Pi(q)$ и суждения об устойчивости положения равновесия $q^0 = 0$.

а) $\Pi(q) = q_1^2$, в одномерном случае устойчивость по теореме 7.1; в многомерном — теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

б) $\Pi(q) = -q_1^2$, при любой размерности неустойчивость по теоремам 7.2, 7.4 и по теореме 7.3 — в одномерном.

в) $\Pi(q) = -q_1^4$, в одномерном случае неустойчивость по теоремам 7.3, 7.4; в многомерном — по теореме 7.4.

г) $\Pi(q) = -q_1^4 - q_2^6$, теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

д) $\Pi(q) = q_1 q_2 q_3$, неустойчивость по теореме 7.4.

е) $\Pi(q) \equiv 0$, теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

Тем, у кого пример 7.2 е) вызвал удивление, напоминаем правило игры в задаче Лагранжа. Любое утверждение подразумевает: «... при любой удовлетворяющей (7.1) кинетической энергии T » .

Пример 7.3. Кольцо массы m может двигаться по гладкой окружности радиуса R , окружность вращается вокруг вертикальной оси y с постоянной угловой скоростью ω . Найти положения относительного равновесия кольца и исследовать их на устойчивость (рис. 7.2).

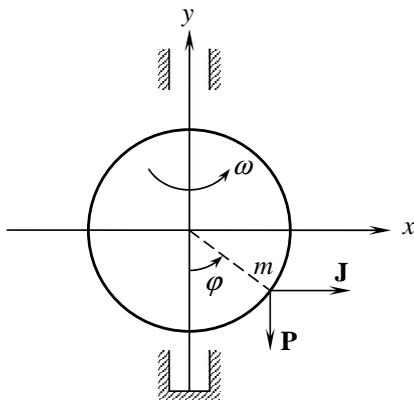


Рис. 7.2

Силе тяжести $\mathbf{P}(0, -mg)$ и силе инерции $\mathbf{J}(m\omega^2 x, 0)$ соответствует потенциальная энергия

$$\Pi = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = mgR(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \varphi$$

(φ — обобщенная координата). По теореме 3.1 в положении равновесия должно выполняться

$$\Pi'(\varphi) = mR(g - \omega^2 R \cos \varphi) \sin \varphi = 0,$$

что приводит к условиям для положения равновесия

$$\sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Характер экстремума определяется второй производной

$$\Pi''(\varphi) = mR(g \cos \varphi - 2\omega^2 R \cos^2 \varphi + \omega^2 R).$$

Ответ зависит от параметров задачи.

- $g > \omega^2 R$. Положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi.$$

Вследствие

$$P''(0) = mR(g - \omega^2 R) > 0,$$

$$P''(\pi) = -mR(g - \omega^2 R) < 0$$

$\varphi_1 = 0$ — устойчивое по теореме 7.1 положение равновесия, $\varphi_2 = \pi$ — неустойчивое по теоремам 7.2, 7.3 положение равновесия.

- $g < \omega^2 R$. Положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Вследствие

$$P''(0) = mR(g - \omega^2 R) < 0,$$

$$P''(\pi) = -mR(g + \omega^2 R) < 0,$$

$$P''(\varphi_{3,4}) = m \frac{(\omega^2 R - g)(\omega^2 R + g)}{\omega^2} > 0$$

$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ — неустойчивые по теоремам 7.2, 7.3 положения равновесия, $\varphi_{3,4}$ — устойчивые по теореме 7.1 положения равновесия.

- $g = \omega^2 R$. Положения равновесия:

$$\varphi_{1,3,4} = 0, \quad \varphi_2 = \pi.$$

Вследствие (учтено $\omega^2 R = g$)

$$P(\varphi) = mgR \frac{[(1 - \cos \varphi)^2 - 2]}{2}, \quad P''(\pi) = -2mgR < 0$$

$\varphi_{1,3,4}$ — устойчивое по теореме 7.1 положение равновесия (при $\varphi \neq 2k\pi$ выполняется $P(\varphi) > P(0)$), $\varphi_2 = \pi$ — неустойчивое по теоремам 7.2, 7.3 положение равновесия.

Г л а в а III. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

§ 8. Постановка задачи о малых колебаниях

Теория малых колебаний изучает движение консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия, причем это движение должно определяться линейными уравнениями Лагранжа. Линейность уравнений обеспечивается отсутствием в разложениях по q, \dot{q} кинетической T и потенциальной Π энергий членов более высокого, чем второй, порядка. Как и в § 7, предполагаем, что устойчивому положению равновесия q^0 соответствует начало координат фазового пространства: $q_i^0 = 0, \dot{q}_i^0 = 0$, считаем также $\Pi(0) = 0$. Разложения T и Π в окрестности $q_i^0 = 0, \dot{q}_i^0 = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \tilde{a}_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \tilde{a}_{ik}(0) \dot{q}_i \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l=1}^n \left. \frac{\partial \tilde{a}_{ik}}{\partial q_l} \right|_{q=0} q_l \dot{q}_i \dot{q}_k + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \dots, \end{aligned}$$

где обозначено $a_{ik} = \tilde{a}_{ik}(0)$;

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \Pi(0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right|_{q=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right|_{q=0} q_i q_k + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k + \dots, \end{aligned}$$

где обозначено

$$c_{ik} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right|_{q=0} = \text{const},$$

$\Pi(0) = 0$ по предположению, $\partial \Pi(0) / \partial q_i = 0$ по теореме 3.1. Для применения линейной теории малых колебаний в разложениях T и Π

требуется оставить только члены второго порядка — квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (8.1)$$

$$П = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (8.2)$$

с числовыми матрицами

$$A = \|a_{ik}\|, \quad (8.3)$$

$$C = \|c_{ik}\|. \quad (8.4)$$

В результате отбрасывания членов высокого порядка механическая система может утратить свои существенные свойства. Во избежание этого накладывается дополнительное

Условие 8.1. Квадратичные формы (8.1) и (8.2) положительно определены, т. е.

$$T > 0 \quad \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \neq 0, \quad (8.5)$$

$$П > 0 \quad \sum_{i=1}^n q_i^2 \neq 0. \quad (8.6)$$

Первое условие ($T > 0$) есть следствие свойств квадратичной формы относительно обобщенных скоростей в кинетической энергии. Второе условие ($П > 0$) необходимо во избежание нарушения исходного предположения об устойчивости положения равновесия.

Пример 8.1. Для консервативной системы с энергиями

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

$$П = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^4),$$

по теореме 7.1 положение равновесия $q_1 = 0, q_2 = 0$ устойчиво. Если оставить в $П(q)$ только члены второго порядка, факт устойчивости

теряется: общее решение уравнений Лагранжа в этом случае приобретет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= C \sin(t + \alpha), \\ q_2 &= At + B. \end{aligned}$$

§ 9. Решение задачи о малых колебаниях

Для формирования алгоритма нахождения общего решения задачи малых колебаний составим, исходя из функций (8.1), (8.2), уравнения Лагранжа

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.1)$$

С использованием обозначений (8.3), (8.4) и

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

систему (9.1) можно записать в виде

$$A\ddot{q} + Cq = 0.$$

Поставим следующий вопрос: при каких числах $u_1, u_2, \dots, u_n, \omega, \alpha$ система (9.1) имеет нетривиальное $q(t) \neq 0$ решение

$$q_k = u_k \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.3)$$

или в другом виде

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha).$$

Используя обозначения (9.2) и

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

(9.3) можно также записать:

$$q = u \sin(\omega t + \alpha).$$

Подстановка (9.3) в систему (9.1) приводит к уравнениям

$$\left[\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \omega^2 a_{ik}) u_k \right] \sin(\omega t + \alpha) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сократим на $\sin(\omega t + \alpha)$, что возможно вследствие предположения о нетривиальности решения (9.3), и обозначим

$$\rho = \omega^2. \quad (9.5)$$

Получим относительно u_k линейную однородную алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \rho a_{ik}) u_k = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.6)$$

или с учетом обозначений (8.3), (8.4), (9.4) —

$$(C - \rho A)u = 0.$$

Из предположения о нетривиальности решения (9.3) следует $u \neq 0$, а это возможно только при условии

$$\det \|c_{ik} - \rho a_{ik}\| = \det(C - \rho A) = 0. \quad (9.7)$$

Раскрытие определителя приводит к алгебраическому уравнению степени n

$$a_0 \rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \dots + a_{n-1} \rho + a_n = 0. \quad (9.8)$$

Уравнение (9.7) и оно же (9.8) в раскрытом виде называется **уравнением частот** или **вековым уравнением**. Не следует путать уравнение частот (9.8) с характеристическим уравнением: уравнение (9.8) появляется как следствие поиска решения в виде (9.3), а характеристическое — при поиске решения в виде $q_k = v_k e^{\lambda t}$. Уравнение (9.8) переходит в характеристическое при $\rho = -\lambda^2$.

В настоящем параграфе потребуются три утверждения а), б) и в), которые будут доказаны в § 10.

а) Все корни ρ_l уравнения частот (9.8) удовлетворяют условию

$$\rho_l > 0.$$

Утверждение а) позволяет дать ответ на поставленный вопрос: каждому корню ρ_l уравнения частот (9.8) соответствует решение (9.3) уравнений Лагранжа (9.2):

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} \sin(\omega_l t + \alpha_l), \quad (9.9)$$

где частота ω_l связана с корнем ρ_l формулой (9.5), числа u_{1l}, \dots, u_{nl} находятся как некоторое нетривиальное решение системы (9.6), в которую подставлен корень ρ_l , число α_l — произвольно.

Определение 9.1. Движение системы, соответствующее решению (9.9), называется **главным колебанием**, числа ω_l — **собственными частотами**, векторы (u_{1l}, \dots, u_{nl}) в (9.9) — **собственными амплитудными векторами**, α_l — **фазой**.

Понятие главного колебания имеет ясный физический смысл: все координаты $q_k(t)$ изменяются во времени t по гармоническому закону с одинаковой частотой ω_l и фазой α_l . Физический смысл часто позволяет найти главные колебания без вычислений.

Пример 9.1. У системы

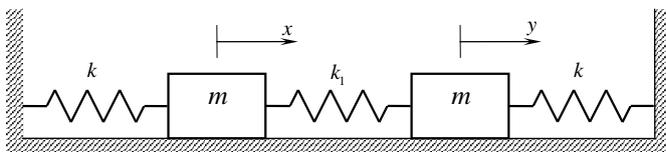


Рис. 9.1

очевидны два главных колебания: с «отключенной» средней пружиной

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_1\right)$$

и с неподвижным центром у средней пружины

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}t + \alpha_2\right).$$

Главные колебания (9.9) дают возможность построить общее решение — совокупность всех движений системы. Линейная однородная система дифференциальных уравнений (9.1) обладает следующим свойством: линейная комбинация решений с постоянными коэффициентами является также решением, т. е. по главным колебаниям (9.9) можно построить решение

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n C_l \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} \sin(\omega_l t + \alpha_l), \quad (9.10)$$

содержащее $2n$ произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Так построенное решение является общим. Чтобы убедиться в этом, докажем, что при некотором выборе постоянных C_l, α_l могут быть удовлетворены любые начальные условия q_k^0, \dot{q}_k^0 . Для доказательства, во-первых, сформулируем утверждения б) и в) (обоснование в § 10).

б) Двум разным корням $\rho_l \neq \rho_k$ уравнения частот (9.8) соответствуют линейно независимые амплитудные векторы — решения системы (9.6).

в) Пусть корень ρ_l уравнения частот m -кратен. Тогда из системы (9.6), в которую подставлен корень ρ_l , можно найти m линейно независимых амплитудных векторов и составить m независимых главных колебаний.

В частности, при $k_1 = 0$ система в примере 9.1 имеет 2-кратный корень $\rho = k/m$ и два приведенные в примере главные колебания с независимыми амплитудами.

Во-вторых, перепишем (9.10) в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} \left(F_l \cos \omega_l t + G_l \frac{1}{\omega_l} \sin \omega_l t \right). \quad (9.11)$$

Произвольные постоянные в (9.10) и (9.11) связаны соотношениями

$$F_l = C_l \sin \alpha_l, \quad G_l = \omega_l C_l \cos \alpha_l.$$

Утверждения б), в) дают возможность считать, что выполняется

$$\det U \neq 0, \quad (9.12)$$

где обозначено

$$U = \left\| \begin{array}{ccc} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{array} \right\| \quad (9.13)$$

— матрица, составленная из амплитудных векторов. Подстановка в (9.11) начальных условий $t_0 = 0$, $q = q^0$, $\dot{q} = \dot{q}^0$ приводит к уравнениям для постоянных F_l, G_l

$$\begin{pmatrix} q_1^0 \\ \vdots \\ q_n^0 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} F_l, \quad \begin{pmatrix} \dot{q}_1^0 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^0 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} G_l.$$

Вследствие (9.12), с учетом обозначений (9.2), (9.13) и

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$$

получим

$$F = U^{-1}q^0, \quad G = U^{-1}\dot{q}^0,$$

т. е. в совокупности решений (9.11) содержится движение при любых начальных данных: (9.10) и (9.11) есть общие решения уравнений Лагранжа.

В заключение параграфа сформулируем алгоритм решения задачи нахождения малых колебаний консервативной системы.

1. Убедиться, что q_0 — устойчивое положение равновесия.
2. Заменой переменных добиться, чтобы выполнялось $q_0 = 0$.
3. Разложить кинетическую T и потенциальную Π энергии в окрестности значений $q = 0$, $\dot{q} = 0$, оставить только квадратичные члены. Извлечь матрицы квадратичных форм: A (для T), C (для Π).
4. Убедиться, что A и C — матрицы положительно определенных квадратичных форм.

5. Составить уравнение частот

$$\det(C - \rho A) = 0,$$

найти его корни ρ_1, \dots, ρ_n .

6. Для каждого корня ρ_l из уравнения

$$(C - \rho_l A)u_l = 0$$

вычислить амплитудный вектор u_l . Для m -кратного корня найти m линейно независимых амплитудных векторов.

7. Каждая пара ρ_l, u_l порождает главное колебание ($\omega_l = \sqrt{\rho_l}$, см. (9.5))

$$q = u_l \sin(\omega_l t + \alpha_l).$$

8. Общее решение есть линейная комбинация главных колебаний

$$q = \sum_{l=1}^n C_l u_l \sin(\omega_l t + \alpha_l) = \sum_{l=1}^n u_l (F_l \cos \omega_l t + G_l \frac{1}{\omega_l} \sin \omega_l t)$$

в двух эквивалентных формах.

9. Если требуется найти решение при конкретных начальных условиях q_0, \dot{q}_0 , то по общему решению вычисляются произвольные постоянные F_l, G_l или C_l, α_l .

§ 10. Нормальные координаты

В предыдущем параграфе приведено решение задачи малых колебаний в произвольных обобщенных координатах. Решение теоретических вопросов часто бывает целесообразно проводить по следующей схеме: переход от исходных координат к наиболее удобным, решение задачи в новых координатах и возврат результата к исходным переменным. В случае задачи малых колебаний решение максимально упрощается в нормальных координатах.

Определение 10.1. Координаты $\theta_1, \dots, \theta_n$ называются **нормальными или главными**, если в них кинетическая T и потенциальная U энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k^2, \quad (10.1)$$

$$II = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k \theta_k^2. \quad (10.2)$$

Для перехода к нормальным координатам по матрицам A и C квадратичных форм T и II (см. (8.1) — (8.4)) составим квадратичные формы

$$F_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (10.3)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} x_i x_k. \quad (10.4)$$

По условию обе формы положительно определены. Вследствие положительной определенности формы F_1 найдется такое неособенное линейное преобразование

$$x_i = \sum_{k=1}^n u_{ik} y_k, \quad (10.5)$$

что в новых переменных y формы F_1, F_2 примут вид

$$F_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2, \quad F_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k y_k^2. \quad (10.6)$$

Вследствие положительной определенности формы F_2 выполняется

$$r_k > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (10.7)$$

Действительно, в противном случае (есть коэффициент $r_l \leq 0$) при некотором выборе значений координат ($y_l \neq 0, y_k = 0, k \neq l$) для формы F_2 выполнялось бы $F_2 \leq 0$, что противоречит положительной определенности.

Положим в (10.3) и (10.5) $x_i = \dot{q}_i, y_k = \dot{\theta}_k$, тогда замена переменных (10.5) придаст кинетической энергии (8.1) вид (10.1). Аналогично — в результате переобозначений в (10.4) и (10.5) $x_i = q_i, y_k = \theta_k$, потенциальная энергия (8.2) примет вид (10.2). Таким образом, одновременный перевод двух квадратичных форм F_1, F_2 к виду (10.6) — это и есть неособенный переход от исходных переменных q к нормальным координатам θ :

$$q_i = \sum_{k=1}^n u_{ik} \theta_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.8)$$

$$\det \|u_{ik}\| \neq 0. \quad (10.9)$$

Решим задачу малых колебаний в нормальных координатах. Составим в силу (10.1), (10.2) уравнения Лагранжа

$$\ddot{\theta}_k + r_k \theta_k = 0. \quad (10.10)$$

Решение с учетом (10.7) имеет вид

$$\theta_k = C_k \sin(\sqrt{r_k} t + \alpha_k).$$

Возврат при помощи (10.8) к исходным переменным q приводит в этих переменных к общему решению

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_k u_{ik} \sin(\sqrt{r_k} t + \alpha_k).$$

Сравним этот результат с общим решением

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_k u_{ik} \sin(\sqrt{\rho_k} t + \alpha_k),$$

полученным в § 9 другим способом (см. (9.10)). Сравнение позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, корни ρ_k уравнения частот и коэффициенты r_k в выражении (10.2) для потенциальной энергии в нормальных координатах суть одно и то же. Это влечет за собой обоснование приведенного в § 9 без доказательства свойства а): вследствие (10.7) корни уравнения частот удовлетворяют условию: $\rho_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Во-вторых, в качестве матрицы амплитудных векторов $\|u_{ik}\|$ может быть принята матрица перехода к нормальным координатам. А это обосновывает свойства б), в) из § 9: вследствие (10.9) вне зависимости от кратности корней уравнения частот найдется n линейно независимых амплитудных векторов — решений системы (9.6). Обратное, вообще говоря, не верно: не каждую совокупность из n линейно независимых амплитудных векторов можно взять в качестве матрицы перехода к нормальным координатам. Это связано с тем, что система (9.6) решается неоднозначно. Если подставить замену (10.5) в квадратичную форму (10.3) и сравнить с (10.6), получим условие

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{il} u_{kj} = \delta_{lj} = \begin{cases} 1, & l = j, \\ 0, & l \neq j, \end{cases}$$

которому должны удовлетворять два амплитудных вектора с номерами l и j для того, чтобы матрица, составленная из амплитудных векторов, приводила к нормальным координатам.

Подчеркнем еще раз мысль, высказанную в начале параграфа: переход к нормальным координатам — не способ решения задачи малых колебаний, а удобный путь исследования теоретических вопросов. В § 11 и § 12 изучены два таких вопроса.

§ 11. Реакция консервативной системы на периодическое воздействие

Предполагается, что в дополнение к потенциальным силам консервативная система испытывает гармоническое воздействие, которому соответствуют обобщенные силы

$$Q_i^* = a_i \sin \Omega t. \quad (11.1)$$

Для того, чтобы понять, каков будет отклик на воздействие, сделаем переход (10.8) к нормальным координатам. Обобщенные силы преобразуются так, чтобы сохранялась элементарная работа

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i^* \delta q_i = \sum_{i,k=1}^n Q_i^* u_{ik} \delta \theta_k = \sum_{k=1}^n \Theta_k^* \delta \theta_k,$$

откуда следует, что закон преобразования обобщенных сил

$$\Theta_k^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* u_{ik} \quad (11.2)$$

контрвариантен по отношению к преобразованию (10.8) координат. В нормальных координатах уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = b_k \sin \Omega t, \quad (11.3)$$

где вследствие (11.1) и (11.2) выполняется

$$b_k = \sum_{i=1}^n a_i u_{ik}.$$

Общее решение каждого уравнения (11.3) складывается из частного решения и общего решения однородного уравнения ($b_k = 0$). Частное решение отыскиваем в виде

$$\theta_k^* = E_k \sin \Omega t. \quad (11.4)$$

Подстановка (11.4) в (11.3) после сокращения на $\sin \Omega t$ приводит к выражению

$$E_k(\omega_k^2 - \Omega^2) = b_k. \quad (11.5)$$

Рассмотрим два случая.

1. $\Omega \neq \omega_k$. Из (11.5) находится E_k и строится общее решение

$$\theta_k = F_k \cos \omega_k t + G_k \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (11.6)$$

(общее решение однородного уравнения удобно взять в форме (9.11)). Выразим произвольные постоянные F_k, G_k через начальные условия: при $t = 0, \theta_k = \theta_k^0, \dot{\theta}_k = \dot{\theta}_k^0$ справедливо

$$F_k = \theta_k^0, \quad G_k = \dot{\theta}_k^0 - \frac{b_k \Omega}{\omega_k^2 - \Omega^2}.$$

Общее решение (11.6) принимает вид

$$\theta_k = \theta_k^0 \cos \omega_k t + \dot{\theta}_k^0 \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k} \sin \omega_k t \right),$$

в котором последнее выражение можно вместо (11.4) считать другим частным решением системы (11.3):

$$\theta_k^{**} = \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k} \sin \omega_k t \right). \quad (11.7)$$

2. $\Omega = \omega_k$. В этом случае из (11.5) нельзя найти частное решение вида (11.4). Для нахождения частного решения вычислим по правилу Лопиталья результат предельного перехода $\Omega \rightarrow \omega_k$ в (11.7):

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_k} \theta_k^{**} = -\frac{b_k}{2\omega_k} \left(t \cos \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t \right). \quad (11.8)$$

Подстановкой нетрудно убедиться, что полученное выражение действительно удовлетворяет (11.3). Таким образом, при $\Omega = \omega_k$ общее решение имеет вид

$$\theta_k = \theta_k^0 \cos \omega_k t + \dot{\theta}_k^0 \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{b_k}{2\omega_k} \left(t \cos \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t \right).$$

Последнее выражение неограниченно возрастает со временем и реализует явление резонанса. Заметим, что для возникновения резонанса недостаточно совпадения частоты Ω воздействия (11.1) с одной из собственных частот ω_k системы. Дополнительно требуется, чтобы в нормальных координатах в соответствующем уравнении Лагранжа (11.3) выполнялось $b_k \neq 0$.

Изучен случай гармонического воздействия (11.1) на консервативную систему. К этому случаю сводится произвольное периодическое воздействие $Q_i^*(t)$. Для этого требуется преобразовать силы к нормальным координатам (см. (11.2)), разложить Θ_k^* в ряды Фурье

$$\Theta_k^* = \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} \sin l\Omega t \quad (11.9)$$

и каждому слагаемому в сумме поставить в соответствие частное решение (11.7) или (11.8). Сумма частных решений определит реакцию системы $\theta_k^*(t)$ на периодическое воздействие в нормальных координатах, а после перехода (10.8) — в исходных. Ряд Фурье (11.9) соответствует нечетному периодическому воздействию ($Q_i^*(-t) = Q_i^*(t)$), общий случай рассматривается аналогично.

§ 12. Случай нулевого корня в уравнении частот

Процедура решения задачи малых колебаний, приведенная в конце § 9, за небольшими исключениями полностью проходит при ослаблении требований, предъявляемых к системе. А именно, квадратичную форму в кинетической энергии по-прежнему считаем положительно определенной, а потенциальную энергию предполагаем положительно постоянной: $\Pi(q) \geq 0$. Свойство кинетической энергии оставляет возможность перехода (10.8) к нормальным координатам, но вследствие ослабления свойства потенциальной энергии в выражении (10.2) вместо (10.7) выполняется

$$r_k > 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad r_l = 0, \quad l = \overline{m+1, n}.$$

Уравнения Лагранжа (10.10) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_k + r_k \theta_k &= 0, \quad k = \overline{1, m}, \\ \ddot{\theta}_k &= 0, \quad l = \overline{m+1, n}, \end{aligned}$$

а общее решение — вид

$$\theta_k = C_k \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k), \quad k = \overline{1, m},$$

$$\theta_l = F_l + tG_l, \quad l = \overline{m+1, n}.$$

Возврат (10.8) к исходным переменным даст общее решение

$$q_i = \sum_{k=1}^m C_k u_{ik} \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k) + \sum_{l=m+1}^n u_{il}(F_l + tG_l).$$

Процедура, приведенная в конце § 9, справедлива в данном случае с единственным отличием: корню $r_l = \rho_l = \omega_l^2 = 0$ уравнения частот в общем решении соответствует «главное колебание»

$$q_i = u_{il}(F_l + tG_l), \quad i = \overline{1, n}.$$

Этот же результат можно было бы получить переходом в (9.11) к пределу $\omega_l \rightarrow 0$.

Глава IV. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 13. Теоремы Барбашина–Красовского и Ляпунова

Как и в § 4, рассматривается автономная система

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^m, \quad \varphi(0) = 0 \quad (13.1)$$

с общим решением $x = f(t, x_0)$, ($x_0 = f(0, x_0)$), обладающая нулевым решением $x(t) \equiv 0$ (см. (4.1) – (4.5)).

Определение 13.1. Решение $x = 0$ системы 13.1 **асимптотически устойчиво по Ляпунову**, если выполнены два условия:

1. $x = 0$ — устойчивое по Ляпунову решение (см. определение 4.1);

2. существует такая Δ -окрестность, что для решений $f(t, x_0)$ справедливо

$$\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x_0) = 0 \right\}. \quad (13.2)$$

Δ -окрестность называется **областью притяжения**.

Теорема 13.1 (Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский). Пусть существует такая функция $V(x)$, что для нее и системы (13.1) выполняется:

1. $V(x)$ — положительно определенная функция;

2.

$$W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x \in M, \\ < 0, & x \notin M, \end{cases} \quad (13.3)$$

где M — некоторое множество. Единственным решением, принадлежащим M при $t \in [0, \infty)$, является $x \equiv 0$:

$$\{\forall t \geq 0, W(x(t)) = W(f(t, x_0)) = 0\} \Rightarrow \{x(t) \equiv 0\}. \quad (13.4)$$

Тогда $x \equiv 0$ — асимптотически устойчивое по Ляпунову решение.

Если условие 1 заменить условием 1*:

1*. $V(0) = 0$; $\forall \delta > 0, \exists |x_0| < \delta, V(x_0) < 0$, то решение x_0 — неустойчиво по Ляпунову.

□ Докажем сначала, что условия 1, 2 теоремы влекут асимптотическую устойчивость. Решение $x \equiv 0$ устойчиво в силу теоремы 5.1. Фиксируем такое число $\varepsilon > 0$, что в ε -окрестности выполнено:

$$V(x) > 0, W(x) \leq 0.$$

Вследствие устойчивости справедливо:

$$\begin{aligned} \exists \Delta > 0, \forall |x_0| < \Delta, \forall t \geq 0, \forall t_1 \geq 0, \\ |x(t)| = |f(t, x_0)| = |f(t - t_1, x_1)| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где обозначено: $x_1 = f(t_1, x_0)$; использовано групповое свойство (4.4):

$$f(t, x_0) = f(t - t_1 + t_1, x_0) = f(t - t_1, f(t_1, x_0)) = f(t - t_1, x_1).$$

Покажем, что Δ -окрестность — область притяжения, т. е. требуется доказать (13.2) или подробнее

$$\forall |x_0| < \Delta, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists t_1 > 0, \forall t \geq t_1, |f(t, x_0)| < \varepsilon_1. \quad (13.6)$$

В силу устойчивости выполняется

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta > 0, \forall |x_1| < \delta, \forall t \geq t_1, |f(t - t_1, x_1)| < \varepsilon_1 \quad (13.7)$$

(t_1, x_1 — начальные данные), поэтому доказательство (13.6) сводится к обоснованию утверждения

$$\forall |x_0| < \Delta, \forall \delta > 0, \exists t_1 \geq 0, |x_1| = |f(t_1, x_0)| < \delta. \quad (13.8)$$

Предположим противное

$$\exists |x_0| < \Delta, \exists \delta > 0, \forall t \geq 0, 0 < \delta < |f(t, x_0)| < \varepsilon \quad (13.9)$$

— учтено (13.5). Из ограниченной вследствие (13.9) последовательности $f(k\tau, x_0)$ ($\tau > 0$ — некоторое число, $k = 1, 2, \dots$) выделим сходящуюся подпоследовательность $f(k_i\tau, x_0)$, $k_1 < k_2 < \dots$:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(k_i\tau, x_0) = x^*, \quad 0 < \delta \leq |x^*| \leq \varepsilon. \quad (13.10)$$

Функция $V(f(t, x_0))$ при изменении t вследствие (13.3) невозрастает и ограничена снизу значением $V = 0$, поэтому при $t \rightarrow \infty$ существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} V(f(t, x_0)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} V(f(k_i\tau, x_0)) = \\ &= V(\lim_{i \rightarrow \infty} f(k_i\tau, x_0)) = V(x^*). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Рассмотрим решение $f(t, x^*)$. Вследствие условия 2 теоремы найдется такой момент времени $T > 0$, что в этот момент, а по непрерывности и на некотором интервале $[T - t^*, T]$, $0 < t^* < T$, выполняется

$$\dot{V}(f(t, x^*)) < 0,$$

т. е. справедливо

$$V(f(T, x^*)) < V(x^*).$$

Используем это неравенство, (13.10), групповое свойство (4.4), еще один вариант перехода к пределу в (13.11), — приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} V(x^*) &= \lim_{t \rightarrow \infty} V(f(t, x_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(f(T + k_i \tau, x_0)) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} V(f(T, f(k_i \tau, x_0))) = V(f(T, x^*)) < V(x^*), \end{aligned}$$

доказывающему (13.8) и утверждение теоремы:

{условия 1, 2} \Rightarrow $\{x_0$ — асимптотически устойчивое решение}.

Неустойчивость решения $x \equiv 0$ как следствие условий 1*, 2 теоремы доказывается от противного. Предположим устойчивость:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall |x_0| < \delta_1, \forall t \geq 0, |f(t, x_0)| < \varepsilon. \quad (13.12)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такую начальную точку x_0 , чтобы выполнялось (13.12) и вследствие условия 1* теоремы: $V(x_0) = V_0 < 0$. В силу (13.3) для соответствующего решения имеем

$$V(f(t, x_0)) \leq V_0 < 0$$

или

$$\forall t \geq 0, |V(f(t, x_0))| \geq |V_0| > 0. \quad (13.13)$$

Вследствие $V(0) = 0$ и непрерывности $V(x)$ можно выбрать такую δ — окрестность ($0 < \delta < |x_0|$), чтобы выполнялось

$$\{|x| < \delta\} \Rightarrow \{|V(x)| < |V_0|\}. \quad (13.14)$$

Сравнение (13.13) и (13.14) приводит к выводу, что для рассматриваемого решения справедливо

$$|f(t, x_0)| \geq \delta > 0,$$

т. е. в совокупности с (13.12) приходим к выражению

$$\exists x_0, \exists \delta > 0, \forall t \geq 0, 0 < \delta < |f(t, x_0)| < \varepsilon,$$

аналогичному (13.9), противоречие получается дословным повторением рассуждений, следующих за утверждением (13.9). ■

В следующем параграфе теорема 13.1 используется при изучении диссипативных систем. Частным случаем теоремы 13.1 (в (13.3) $M = \{0\}$) является доказанная на полвека раньше

Теорема 13.2 (А.М. Ляпунов). Пусть в Δ -окрестности нулевого решения системы (13.1) существует положительно определенная функция Ляпунова

$$V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (13.1) отрицательно определена

$$W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ < 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда нулевое решение системы (13.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

§ 14. Устойчивость диссипативных систем

Полная энергия $E = T + \Pi$ у определенно-диссипативных систем удовлетворяет условию

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i \begin{cases} = 0, & \dot{q} = 0, \\ < 0, & \dot{q} \neq 0, \end{cases} \quad (14.1)$$

где Q_i^* — обобщенные силы, соответствующие непотенциальным. Как и ранее, при использовании для механических систем определений и результатов, относящихся к системе (13.1), предполагается отождествление переменных $x = (q, \dot{q})$.

Теорема 14.1. Пусть $q^0 = 0$ есть изолированное положение равновесия стационарной определенно-диссипативной системы. Пусть потенциальная энергия имеет при $q_0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q_0 = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

□ Как и в доказательстве теоремы 7.1 обосновывается, что функция $V = E = T + \Pi$ положительно определена, т. е. выполнено условие 1 теоремы 13.1. Выберем в фазовом пространстве $R^{2n}(q, \dot{q})$ такую ε -окрестность, что в ней выполнены условия теоремы: при $q \neq 0$ справедливо $\Pi(q) > 0$, и $q_0 = 0$ — единственное положение равновесия. Полная энергия $E = T + \Pi$ — положительно определенная функция переменных q, \dot{q} . Ее производная \dot{E} по t равна нулю на множестве $M = \{|\dot{q}| = 0\}$ (см. (14.1)). Решения, принадлежащие M при $t \in [0, \infty)$, являются положениями равновесия, но единственным положением равновесия в ε -окрестности является $q_0 = 0$. Условия 1 и 2 теоремы 13.1 выполнены. ■

Пример 14.1. Электрической цепи, изображенной на рис. 14.1,

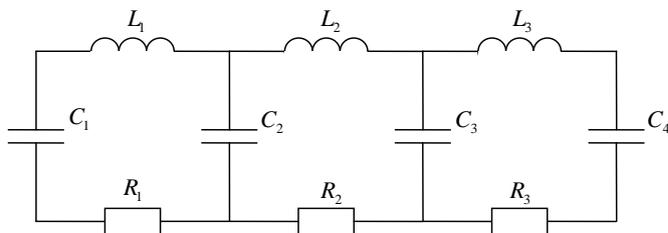


Рис. 14.1

соответствуют кинетическая энергия (\dot{q}_i — сила тока по одному из трех контуров, составляющих цепь, $q_i = \int \dot{q}_i dt$ — количество электричества)

$$T = \frac{1}{2}(L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + L_3 \dot{q}_3^2), \quad (14.2)$$

потенциальная —

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_1} q_1^2 + \frac{1}{C_2} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{C_3} (q_2 - q_3)^2 + \frac{1}{C_4} q_3^2 \right\} \quad (14.3)$$

и функция Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}(R_1 \dot{q}_1^2 + R_2 \dot{q}_2^2 + R_3 \dot{q}_3^2). \quad (14.4)$$

Изучим устойчивость состояния покоя цепи ($q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$) в двух случаях.

1. $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0, R_3 \neq 0$. Все три функции (14.2) – (14.4) положительно определены, вследствие чего: $(q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0)$ – единственное положение равновесия, и потенциальная энергия Π в этом положении имеет строгий минимум; для системы справедливо условие (14.1) определенной диссипативности ($\dot{E} = -2\Phi$). Выполнены все условия теоремы 14.1, поэтому положение покоя цепи – асимптотически устойчиво.

2. $R_1 = 0, R_2 \neq 0, R_3 = 0$. В этом случае не выполнено условие (14.1) теоремы 14.1 ($\dot{E} = -2\Phi = -R_2\dot{q}_2^2 = 0$ при $\dot{q}_1 \neq 0, \dot{q}_2 = 0, \dot{q}_3 \neq 0$). Воспользуемся теоремами 7.1 и 13.1. Функция Ляпунова

$$V = E = T + \Pi > 0$$

положительно определена (см. (14.2), (14.3)), а ее производная в силу уравнений

$$W = \dot{V} = \dot{E} = -2\Phi = -R_2\dot{q}_2^2 \begin{cases} = 0, & (q, \dot{q}) \in M = \{\dot{q}_2 = 0\}, \\ < 0, & (q, \dot{q}) \notin M \end{cases} \quad (14.5)$$

– отрицательно постоянна, поэтому по теореме 7.1 положение покоя устойчиво по Ляпунову. Уравнения Лагранжа, соответствующие функциям (14.2) – (14.4), имеют вид

$$\begin{aligned} L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q_1 - \frac{1}{C_2}q_2 &= 0, \\ L_2\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)q_2 - \frac{1}{C_2}q_1 - \frac{1}{C_3}q_3 + R_2\dot{q}_2 &= 0, \\ L_3\ddot{q}_3 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q_3 - \frac{1}{C_3}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Обозначим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right), \quad \omega_3^2 = \frac{1}{L_3} \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right). \quad (14.7)$$

Возможны два варианта.

а) $\omega_1 = \omega_3$. Подстановкой нетрудно убедиться в том, что при произвольной постоянной A система (14.6) имеет решение

$$q_1 = C_2 A \cos \omega_1 t, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = -C_3 A \cos \omega_1 t \quad (14.8)$$

(при $R_2 = 0$ это одно из главных колебаний в цепи), т. е. в сколь угодно малой окрестности начала координат фазового пространства $R^6(q, \dot{q})$ найдется начальная точка

$$q_1^0 = C_2 A, \quad q_2^0 = 0, \quad q_3^0 = -C_3 A, \quad \dot{q}_1^0 = 0, \quad \dot{q}_2^0 = 0, \quad \dot{q}_3^0 = 0,$$

соответствующая незатухающему решению системы (14.6). Из определения 13.1 следует, что при $\omega_1 = \omega_3$ положение покоя не является асимптотически устойчивым.

б) $\omega_1 \neq \omega_3$. Первое условие и (13.3) во втором условии теоремы 13.1 с очевидностью выполнены (см. (14.2), (14.3) и (14.5)). Для обоснования асимптотической устойчивости покажем, что справедливо и условие (13.4). Из утверждения

$$\forall t \geq 0, x(t) = f(t, x_0) \in M = \{\dot{q}_2 = 0\}$$

(см. (13.4), (14.5)) следует $q_2(t) = q_2^0 = \text{const}$ и после интегрирования первого и третьего уравнений системы (14.6) с учетом обозначений (14.7) следует требуемый вид решения

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_2^0, \\ q_2 &= q_2^0, \\ q_3 &= A_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3) + \frac{C_3}{C_3 + C_4} q_2^0, \end{aligned} \tag{14.8}$$

подстановка которого во второе уравнение приводит к условию на постоянные $q_2^0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} \right) q_2^0 - \\ &- \frac{1}{C_2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{1}{C_3} A_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3) = 0. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Условие (14.9) с учетом $\omega_1 \neq \omega_3$ справедливо при любом значении $t \geq 0$ только, если выполняется $q_2^0 = 0, A_1 = 0, A_3 = 0$, что соответствует решению (14.8): $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$. Таким образом, все условия теоремы 13.1 выполнены — положение покоя электрической цепи асимптотически устойчиво.

§ 15. Устойчивость линейных автономных систем

Рассмотрим вопросы устойчивости, связанные с линейными стационарными (автономными) системами

$$\dot{x} = Dx, \quad x \in R^n. \tag{15.1}$$

Решение (15.1) отыскивается в виде

$$x = ue^{\lambda t}, \quad u \in R^n, \quad u = \text{const}, \quad |u| \neq 0. \quad (15.2)$$

Подстановка (15.2) в (15.1) и сокращение на $e^{\lambda t}$ приводит к системе уравнений для u и λ

$$(D - \lambda E)u = 0. \quad (15.3)$$

Условие

$$\det(D - \lambda E) = 0$$

существования решения $u \neq 0$ линейной однородной системы уравнений (15.3) приводит к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (15.4)$$

Уравнение имеет n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (кратные корни перечисляются столько раз, какова кратность корня) — собственных чисел матрицы D . В общем случае корни являются комплексными

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k. \quad (15.5)$$

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений показывается, что общее решение системы (15.1) (совокупность решений при начальных условиях: $t_0 = 0, x_0$) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k \{e^{\mu_k t} [h_k(t) \cos \nu_k t + H_k(t) \sin \nu_k t]\}, \quad (15.6)$$

где $\mu_k = \text{Re}\lambda_k, \nu_k = \text{Im}\lambda_k$ (см. (15.5)); C_k — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям; $h_k(t), H_k(t) \in R^n$ — вектор-функции с элементами — многочленами, причем выполняется

$$\det \| h_1(0), \dots, h_n(0) \| \neq 0. \quad (15.7)$$

Из вида решения (15.6) следует, что с точки зрения устойчивости в зависимости от распределения корней на комплексной плоскости у линейной системы (15.1) возможны три случая.

Теорема 15.1.

1. $\{\forall \mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0\} \Leftrightarrow \{x \equiv 0 - \text{асимптотически устойчивое решение системы (15.1)}\}$;
2. $\{\exists \mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k > 0\} \Rightarrow \{x \equiv 0 - \text{неустойчивое решение системы (15.1)}\}$;
3. $\{\mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = \overline{1, r} < n, \mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k = 0, k = \overline{r+1, n}\} \Rightarrow \{x \equiv 0 - \text{устойчивое по Ляпунову или неустойчивое решение системы (15.1)}\}$.

□ Утверждение 1 следует из того, что в каждом слагаемом в (15.6) функция от $t \in [0, \infty)$, стоящая в фигурных скобках, в силу $\mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ограничена и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е. оба условия в определении 13.1 выполнены (условие устойчивости достигается ограничением $|C_k| < \varepsilon_k$ на постоянные C_k). Обратное утверждение \Leftarrow обосновывается далее доказательством случаев 2 и 3: если не выполняется $\forall \mu_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, то возможны или устойчивость (не являющаяся асимптотической) или неустойчивость.

Для обоснования 2, предполагая $\mu_n = \operatorname{Re} \lambda_n > 0$, положим в (15.6): $C_k = 0, k = \overline{1, n-1}$. Выбором $C_n \neq 0$ можно сделать начальные данные $x_0 = C_n h_n(0)$ сколь угодно малыми: $0 < |x_0| < \delta$. Так как в оставшемся слагаемом функция, стоящая в фигурных скобках, неограниченно растет, решение $x(t) = f(t, x_0)$ покинет любую фиксированную ε -окрестность, что и доказывает неустойчивость.

В случае 3 полагаем $C_k = 0, k = \overline{1, n-1}$. Выбором $C_n \neq 0$ можно сделать начальные данные $x_0 = C_n h_n(0)$ сколь угодно малыми:

$$0 < |x_0| < \delta.$$

Соответствующие этим начальным данным решения

$$x(t) = C_n \{[h_k(t) \cos \nu_k t + H_k(t) \sin \nu_k t]\},$$

во-первых, вследствие (15.7) удовлетворяют условию $x(t) \not\equiv 0$, во-вторых, не стремятся к нулю, что и обосновывает утверждение 3 теоремы. ■

Случаи 1, 2 в теореме 15.1 называются **некритическими**. В этих случаях характер устойчивости полностью определяется распределением корней характеристического многочлена (15.4) на комплексной

плоскости: 1 — все корни слева от мнимой оси; 2 — есть корень справа от мнимой оси. В **критическом** случае 3 — нет корней справа от мнимой оси, но есть корни на мнимой оси — для выяснения характера устойчивости требуется более глубоко изучить матрицу D : понять структуру её жордановой формы.

Рассмотрим линейную, автономную систему уравнений Лагранжа

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15.8)$$

обладающую решением $q(t) \equiv 0$. Один из вариантов исследования устойчивости нулевого решения: привести систему (15.8) к нормальному виду (15.1), вычислить характеристическое уравнение (15.4) и применить теорему 15.1. Второй вариант — вычисление характеристического уравнения непосредственно из системы (15.8). Вводя обозначения для постоянных матриц

$$A = \|a_{ik}\|, \quad B = \|b_{ik}\|, \quad C = \|c_{ik}\|,$$

запишем (15.8) в матрично-векторных обозначениях

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0. \quad (15.9)$$

Решение отыскивается в виде

$$q = ue^{\lambda t}, \quad u \in R^n, \quad u = \text{const}, \quad |u| \neq 0.$$

Подстановка в (15.9) и сокращение на $e^{\lambda t}$ определит уравнение для u и λ

$$(A\lambda^2 + B\lambda + C)u = 0.$$

Условие

$$\det\|A\lambda^2 + B\lambda + C\| = 0$$

существования решения $|u| \neq 0$ приводит к характеристическому многочлену (15.4) и возможности применить теорему 15.1.

§ 16. Устойчивые многочлены. Критерии Рауса–Гурвица и Михайлова

Как показано в § 15, вопрос о характере устойчивости нулевого решения линейной системы (15.1) или лагранжевой системы (15.8)

во многом определяется ответом на другой вопрос: все ли корни характеристического уравнения (15.4)

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0 \quad (16.1)$$

имеют отрицательную действительную часть. Далее предполагаем

$$a_0 > 0. \quad (16.2)$$

Определение 16.1. Многочлен (16.1) называется **устойчивым**, если все его корни $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ располагаются в комплексной плоскости слева от мнимой оси:

$$\operatorname{Re}\lambda_k = \mu_k < 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (16.3)$$

Существенную помощь в отсеивании неустойчивых многочленов оказывает следующая

Теорема 16.1. Для коэффициентов a_k устойчивого многочлена с учетом (16.2) выполняется $a_k > 0$, $k = \overline{0, m}$.

□ Отсутствие отрицательных коэффициентов a_k следует из разложения многочлена (16.1)

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k) = a_0 \prod_l (\lambda + |\lambda_l|) \prod_j (\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2),$$

где биномы соответствуют действительным корням λ_l , квадратные трехчлены — парам комплексно-сопряженных корней $\mu_j \pm i\nu_j$. Для обоснования отсутствия коэффициентов $a_i = 0$ проведем рассуждения по индукции. Бином $(\lambda + |\lambda_l|)$ или квадратный трехчлен $(\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2)$, взятые на первом шаге, удовлетворяют условию $a_k > 0$. Умножение на общем шаге многочлена с положительными коэффициентами на $(\lambda + |\lambda_l|)$ или на $(\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2)$ с очевидностью сохраняет свойство $\forall a_k > 0$. ■

Условие (16.3) носит только необходимый характер. Например, многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -1$ и не является устойчивым.

Далее приводятся два критерия устойчивости многочлена, причем суждение об устойчивости выносится, минуя вычисление корней.

Первый — алгебраический критерий — без доказательства¹.

Теорема 16.2 (Е. Раус, А. Гурвиц). *Многочлен (16.1) устойчив тогда и только тогда, когда выполняется $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, где Δ_i — главные центральные миноры определителя Гурвица*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{vmatrix}.$$

Размер определителя Гурвица Δ_m совпадает со степенью многочлена (16.1).

Прежде, чем сформулировать геометрический критерий Михайлова, рассмотрим для многочлена (16.1) годограф Михайлова и его свойства. Заменяем в (16.1) переменную λ на $i\omega$ и отделим действительную и мнимую части

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega) \tag{16.4}$$

Заметим, что в $u(\omega)$ входят только четные степени ω , в $v(\omega)$ — только нечетные:

$$u(-\omega) = u(\omega), \quad v(-\omega) = -v(\omega). \tag{16.5}$$

Меняем ω в пределах $\omega \in [0, \infty)$, строим годограф Михайлова — годограф комплексного числа (16.4) (рис. 16.1).

¹Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — 3-е изд. — М.: Наука, 1967, гл.XV.

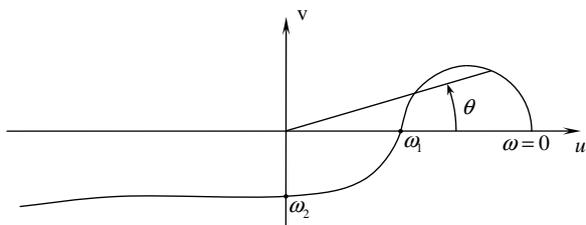


Рис. 16.1

В дальнейшем используется число $\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = \theta(\infty) - \theta(0)$ — изменение аргумента комплексного числа. Сформулируем несколько свойств $\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta$.

а) Рассматриваются только такие многочлены, у которых нет мнимых корней $\lambda = i\omega_0$. Иначе при $\omega = \omega_0$ годограф Михайлова проходил бы через начало координат, где не определен аргумент θ .

б) Число $\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta$ кратно $\pi/2$, причем в зависимости от степени многочлена выполняется

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = \begin{cases} k\pi, & m = 2l, \\ \frac{\pi}{2} + k\pi, & m = 2l + 1. \end{cases} \quad (16.6)$$

Результат есть следствие (16.5) и равенства

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

Результат (16.6) дает возможность ограничиться построением годографа в пределах $\omega \in [0, \tilde{\omega}]$, где $\tilde{\omega}$ — наибольший из объединенной совокупности корней уравнений $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$. При $\omega > \tilde{\omega}$ годограф остается в определенном квадранте, а предельное значение θ находится при помощи (16.6). Например, если годограф, изображенный на рис. 16.1, в дальнейшем не покинет третьего квадранта, то

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = \begin{cases} -\pi, & m = 2l, \\ -\frac{\pi}{2}, & m = 2l + 1. \end{cases}$$

в) При изменении ω в пределах $\omega \in (-\infty, \infty)$ справедлива связь

$$\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = 2 \Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta.$$

Этот результат опять же следствие (16.5): годограф при $\omega \in (-\infty, 0]$, и годограф при $\omega \in [0, \infty)$ симметричны относительно действительной оси.

На основе свойств а) — в) доказывается

Теорема 16.3. *Количество l корней слева от мнимой оси (у которых $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$) и количество r — справа от мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$) связаны с годографом Михайлова следующим образом*

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = (l - r) \frac{\pi}{2}. \quad (16.7)$$

□ Представим многочлен (16.1) в виде

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k). \quad (16.8)$$

С учетом $\lambda = i\omega$, $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ для одного бинорма выполняется

$$\lambda - \lambda_k = -\mu_k + i(\omega - \nu_k) = R_k(\omega) e^{i\theta_k(\omega)}. \quad (16.9)$$

Рассмотрим для (16.9) изменение θ_k при $\omega \in (-\infty, \infty)$. С учетом свойства а) возможны два случая

1) $\mu_k < 0$. Тогда $\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = \pi$ (рис. 16.2 и 16.3).

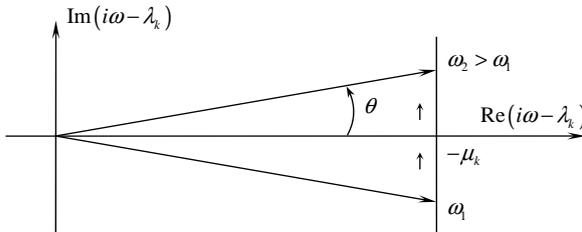


Рис. 16.2

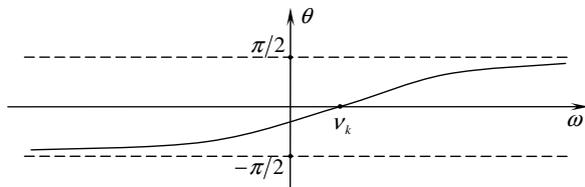


Рис. 16.3

2) $\mu_k > 0$. Тогда $\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = -\pi$ (рис. 16.4 и 16.5).

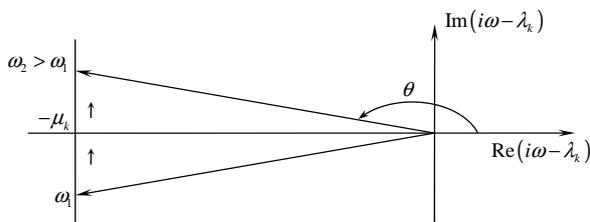


Рис. 16.4

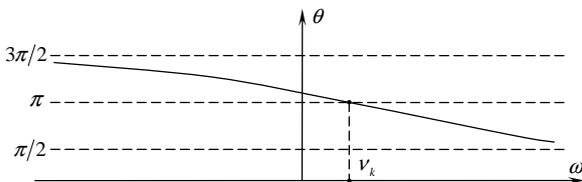


Рис. 16.5

Подставляем (16.9) в разложение (16.8), получаем

$$f(i\omega) = a_0 \left\{ \prod_{k=1}^m R_k(\omega) \right\} e^{i \sum_{k=1}^m \theta_k(\omega)},$$

откуда следует

$$\theta(\omega) = \arg f(i\omega) = \sum_{k=1}^m \theta_k(\omega)$$

и

$$\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = \sum_{k=1}^m \Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta_k = (l-r)\pi$$

а свойство в) приводит к утверждению (16.7) теоремы. ■

Следствие 1. Степень многочлена (16.1) ($m = l + r$) и поведение годографа Михайлова ($l - r$) с учетом свойств а), б) однозначно определяют распределение корней (l и r) на комплексной плоскости.

Следствие 2 (А.В. Михайлов). Многочлен (16.1) устойчив —

$$l = m, \quad r = 0$$

— в том и только в том случае, если для годографа Михайлова справедливо

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = m \frac{\pi}{2},$$

где m — степень многочлена.

§ 17. Устойчивость по линейному приближению

В результате разложения правых частей нелинейной автономной системы

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad \varphi(0) = 0$$

в окрестности нулевого решения система примет вид

$$\dot{x} = Dx + R(x), \tag{17.1}$$

где

$$D = \left\| \left. \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k} \right|_{x=0} \right\|$$

— числовая матрица, а $R(x)$ — функции, разложения которых содержит слагаемые не менее, чем второго порядка. Как будет показано далее, характер устойчивости нулевого решения системы линейного приближения

$$\dot{x} = Dx \tag{17.2}$$

во многих случаях (1 и 2 в теореме 15.1) переносится на нелинейную систему (17.1). Доказательство будет проводиться по следующей схеме. Для линейной системы (17.2) строятся функции Ляпунова, определяющие по теоремам 15.4 и 13.2 характер устойчивости. Затем показывается, что с построенными функциями и нелинейная система (17.1) удовлетворяет условиям теорем 15.4 и 13.2. Функция Ляпунова для системы (17.2) строится как квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2} x^T X x \tag{17.3}$$

с числовой матрицей X . Производная \dot{V} в силу системы (17.2) — также квадратичная форма

$$W = \dot{V} = \frac{1}{2}x^T Cx. \quad (17.4)$$

Вычисления с учетом (17.2) и $\dot{x}^T = x^T D^T$

$$W = \dot{V} = \frac{1}{2}\{x^T D^T Xx + x^T X D x\} = \frac{1}{2}x^T Cx \quad (17.5)$$

связывают матрицы X и C в квадратичных формах (17.3) и (17.4):

$$D^T X + X D = C. \quad (17.6)$$

Матричное уравнение (17.6) относительно X называется **уравнением Ляпунова**. Приведем несколько результатов, касающихся решения уравнения Ляпунова.

Теорема 17.1. Пусть для собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ρ_1, \dots, ρ_n матриц A и B размерности $(n \times n)$ выполняется

$$\lambda_i + \rho_k \neq 0, \quad i, k = \overline{1, n}. \quad (17.7)$$

Тогда матричное уравнение

$$AX + XB = C \quad (17.8)$$

имеет единственное решение X при любой матрице C .

□ Уравнение (17.8) можно рассматривать как сокращенную запись линейной системы уравнений $Gx = c$ порядка n^2 для элементов матрицы $X = \|x_{ik}\|$. Собственным числам λ_i, ρ_k соответствуют собственные векторы u_i, v_k (у матриц B и B^T собственные числа ρ_k совпадают)

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad B^T v_k = \rho_k v_k.$$

Подстановкой в правую часть (17.8) убеждаемся в том, что матрицы

$$X_{ik} = u_i v_k^T$$

— собственные матрицы линейного оператора G :

$$AX_{ik} + X_{ik}B = Au_i v_k^T + u_i v_k^T B = \lambda_i u_i v_k^T + u_i \rho_k v_k^T = (\lambda_i + \rho_k)X_{ik}.$$

Таким образом найдены все n^2 собственных значений $\lambda_i + \rho_k$ матрицы G , вследствие (17.7) матрица G — неособенная, и уравнение (17.8) (или $Gx = c$) имеет единственное решение X . ■

Теорема 17.2. Пусть для собственных чисел $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ матрицы D выполняется

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \mu_k < 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (17.9)$$

Тогда решение X матричного уравнения (E — единичная матрица)

$$D^T X + X D = -E \quad (17.10)$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. решение X — единственно;
2. решение представимо в виде

$$X = \int_0^{\infty} e^{D^T t} e^{D t} dt; \quad (17.11)$$

3. X — симметричная матрица;

4. соответствующая матрице X квадратичная форма (17.3) — положительно определена.

□ Утверждение 1 следует из теоремы 17.1: собственные числа матриц D и D^T совпадают, вследствие (17.9) для них выполняется (17.7). Подстановка матрицы

$$Z(t) = e^{D^T t} e^{D t} \quad (17.12)$$

в уравнение

$$\dot{Z} = D^T Z + Z D, \quad Z(0) = E, \quad (17.13)$$

с учетом перестановочности матриц D и $e^{D t}$ приводит к тождеству. Интегрирование тождества (17.13) определит равенство

$$Z(t) - Z(0) = D^T \int_0^t e^{D^T t} e^{D t} dt + \int_0^t e^{D^T t} e^{D t} dt D. \quad (17.14)$$

Вследствие (17.9) решения матричных уравнений $\dot{Y} = D^T Y$, $\dot{Y} = D Y$ и матрица (17.12) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, и переход к пределу

$t \rightarrow \infty$ в (17.14) приводит с учетом $Z(0) = E$ к нужному результату 2: матрица (17.11) — решение уравнения (17.10). Сходимость интеграла (17.11) также определяется условием (17.9). Транспонирование обеих частей уравнения (17.10) приводит к выводу, что X и X^T одновременно являются решениями, что вследствие единственности решения обосновывает симметричность матрицы X : $X = X^T$. Положительную определенность соответствующей квадратичной формы (17.3) обосновывают вычисления

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} x_0^T X x_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x_0^T e^{D^T t} e^{Dt} x_0 dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(t) x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt > 0. \end{aligned}$$

Учтено, что $x(t) = e^{Dt} x_0$ — решение системы $\dot{x} = Dx$, $x(0) = x_0$. ■

Теорема 17.3. Пусть для собственных чисел $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ матрицы D выполняется

$$\lambda_i + \lambda_k \neq 0, \quad i, k = \overline{1, n}; \quad (17.15)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 > 0. \quad (17.16)$$

Тогда существует единственное решение X матричного уравнения

$$D^T X + X D = -E, \quad (17.17)$$

причем при некоторых значениях переменных x_0 выполняется

$$V = \frac{1}{2} x_0^T X x_0 < 0. \quad (17.18)$$

□ Существование единственного решения X уравнения (17.17) с учетом (17.15) следует из теоремы 17.1. Неравенство (17.18) докажем от противного. Предположение $V(x) > 0$ о положительной определенности формы V , вследствие

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$$

(в (17.4) $C = E$) по теореме 13.2 приводит к выводу об асимптотической устойчивости нулевого решения системы $\dot{x} = Dx$, что вследствие (17.16) противоречит теореме 15.1. Предположение $V(x) \geq 0$, $V(x_0) = 0$ при $x_0 \neq 0$ также приводит к противоречию: для решения $x(t) = f(t, x_0)$ на некотором интервале $[0, t_1]$ выполняется

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0,$$

следовательно $V(x(t_1)) < 0$. ■

Теорема 17.4. Пусть для собственного числа $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$ матрицы D выполняется

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 > 0. \quad (17.19)$$

Тогда при некотором числе $c > 0$ матричное уравнение

$$D^T X + X D = 2cX - E \quad (17.20)$$

имеет единственное решение X , причем при некоторых значениях переменных x_0 выполняется

$$V = \frac{1}{2} x_0^T X x_0 < 0. \quad (17.21)$$

□ Уравнение (17.20) эквивалентно уравнению вида (17.17):

$$(D - cE)^T X + X(D - cE) = -E.$$

Корни $\tilde{\lambda}_k$ характеристического уравнения

$$\det(D - cE - \tilde{\lambda}E) = \det(D - (c + \tilde{\lambda})E) = 0,$$

соответствующего матрице $(D - cE)$, связаны с собственными числами матрицы D очевидным соотношением

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - c = \mu_k - c + i\nu_k.$$

Выбор числа $c > 0$ подчиним двум условиям: во-первых, чтобы сохранилось требование (17.19)

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_1 = \mu_1 - c > 0,$$

во-вторых, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_i = \lambda_k + \lambda_i - 2c \neq 0, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Так как при таком выборе c выполнены все требования теоремы 17.3, то справедливы и совпадающие утверждения теорем. ■

Теорема 17.5. Пусть для корней характеристического многочлена системы линейного приближения (17.2) справедливо утверждение 1 теоремы 15.1: решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво вследствие

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (17.1) также асимптотически устойчиво.

□ Так как выполнено условие (17.9) теоремы 17.2, то существует решение X уравнения (17.10), которому соответствует положительно определенная форма V (см. (17.3)). Дифференцирование \dot{V} в силу нелинейной системы (17.1) вследствие (17.10) (см. (17.4) – (17.6)) приводит к результату

$$W = \dot{V} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + x^T X R.$$

Функция $x^T X R$ имеет более высокий порядок малости, чем $\sum_{i=1}^n x_i^2$, поэтому существует ε -окрестность положения $x = 0$, в которой при $x \neq 0$, выполняется $W < 0$, т. е. выполнены все условия теоремы 13.2. ■

Теорема 17.6 Пусть для корней характеристического многочлена системы линейного приближения (17.2) справедливо утверждение 2 теоремы 15.1: решение $x \equiv 0$ неустойчиво вследствие $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ (возможна перенумерация корней). Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (17.1) также неустойчиво.

□ Выполнены условия теоремы 17.4, поэтому существует решение X уравнения (17.20) и при некоторых значениях x_0 справедливо неравенство (17.21). Из вида уравнения (17.20) следует очевидный факт: уравнение

$$D^T Y + Y D = 2cY + E \quad (17.22)$$

($-E$ вместо E) при некотором числе $c > 0$ имеет решение $Y = -X$, для которого при некоторых значениях x_0 выполняется

$$V(x) = \frac{1}{2}x_0^T Y x_0 > 0. \quad (17.23)$$

Дифференцирование функции $x^T V x$ в силу нелинейной системы (17.1) приводит с учетом (17.22) (см. (17.4) – (17.6)) к выражению

$$W = \dot{V} = 2cV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + x^T Y R.$$

Так как функция $x^T Y R$ третьего или более высокого порядка малости, то для функции

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + x^T Y R$$

в некоторой ε -окрестности выполняется $V > 0$, что в сочетании с неравенством (17.23) приводит к выводу: все условия теоремы 5.4 выполнены. ■

§ 18. Вынужденные движения автономной системы. Частотные характеристики

Рассматривается линейная стационарная система с асимптотически устойчивым нулевым положением равновесия

$$\sum_{k=1}^n (a_{lk} \ddot{q}_k + b_{lk} \dot{q}_k + c_{lk} q_k) = 0, \quad l = \overline{1, n}, \quad (18.1)$$

или в матричных обозначениях

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0.$$

Вследствие асимптотической устойчивости корни λ_k характеристического уравнения

$$f(\lambda) = \Delta(\lambda) = \det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \quad (18.2)$$

удовлетворяют условию (теорема 15.1)

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0.$$

Изучим поведение системы при условии, что на нее действуют дополнительные силы $Q_l(t)$, зависящие только от времени t :

$$\sum_{k=1}^n (a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k) = Q_l(t), \quad l = \overline{1, n}. \quad (18.3)$$

Общее решение системы складывается из общего решения однородной системы (18.1) и частного решения системы (18.3)

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t, C_1, \dots, C_{2n}) + q_{\text{частн}}(t).$$

Так как нулевое решение системы (18.1) асимптотически устойчиво, вклад $q_{\text{одн}}(t, C_1, \dots, C_{2n})$ в решение (18.3) при любых начальных данных (значениях постоянных C_j) через определенное время становится сколь угодно малым, и в качестве решения системы (18.3) можно принять функцию $q_{\text{частн}}(t)$ (рис. 18.1)

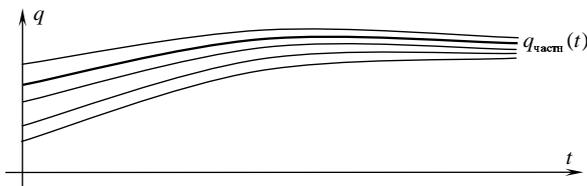


Рис. 18.1

В механике, теории управления, радиоэлектронике употребляется следующая терминология: $Q_l(t)$ — вход в систему, внешнее воздействие, возмущение; $q(t) = q_{\text{частн}}(t)$ — выход, реакция на внешнее воздействие, отклик, вынужденное движение (рис. 18.2).



Рис. 18.2

Ставится следующая задача: по известному возмущению $Q(t)$ вычислить отклик $q(t)$. Решение задачи упрощает то обстоятельство, что для линейных систем (18.3) справедлив непосредственно проверяемый

Принцип суперпозиции. Если воздействиям $Q^\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, m}$, соответствуют отклики $q^\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, m}$, то воздействию $\sum_{\alpha=1}^m Q^\alpha(t)$ соответствует отклик $\sum_{\alpha=1}^m q^\alpha(t)$.

Принцип суперпозиции дает возможность свести поставленную задачу к следующей — найти отклик $q(t)$, если воздействие имеет место только в одном уравнении системы (18.3):

$$Q_l = Q(t)\delta_{lj} = \begin{cases} Q(t), & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases}$$

Ответ на поставленный вопрос зависит от двух обстоятельств: какова исходная система (18.3), т. е. матрицы A , B , C , и каким является воздействие $Q(t)$. Как будет показано далее, вся нужная информация об «индивидуальности» системы содержится в отклике $q(t)$ на возмущение

$$Q_l = \delta_{lj} D e^{i\Omega t}, \quad (18.4)$$

где i — мнимая единица. Отклик отыскивается в таком же виде

$$q_k = E_k e^{i\Omega t}. \quad (18.5)$$

Подстановка (18.4) и (18.5) в систему (18.3) после сокращения на $e^{i\Omega t}$ приводит к алгебраической системе уравнений

$$\sum_{k=1}^n [a_{lk}(i\Omega)^2 + b_{lk}(i\Omega) + c_{lk}] E_k = D \delta_{lj}, \quad l = \overline{1, n}, \quad (18.6)$$

решение которой имеет вид

$$E_k = \frac{D \Delta_{jk}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)}. \quad (18.7)$$

Знаменатель есть определитель системы (18.6) — результат подстановки $i\Omega$ вместо λ в характеристическое уравнение (18.2). Вследствие условия асимптотической устойчивости ($\operatorname{Re} \lambda_k < 0$) для знаменателя при всех значениях Ω справедливо $\Delta(i\Omega) \neq 0$. Числитель в

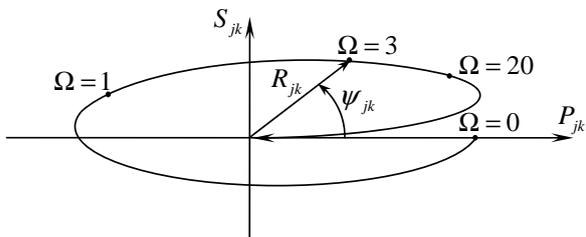


Рис. 18.3

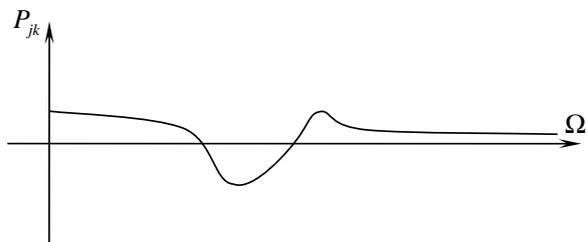


Рис. 18.4

мнимой —

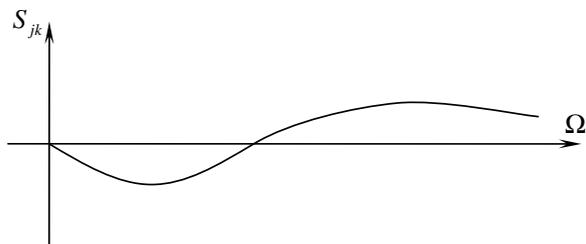


Рис. 18.5

амплитудной —

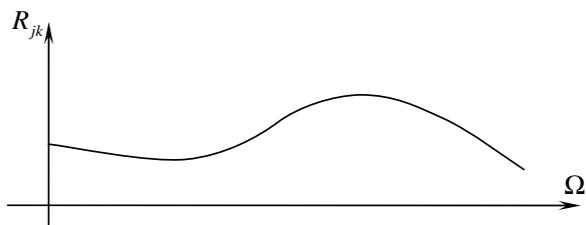


Рис. 18.6

и фазовой —

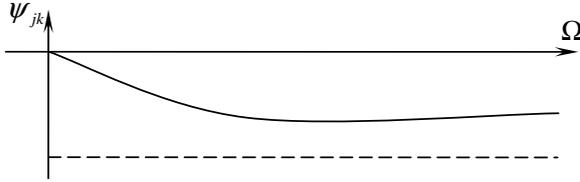


Рис. 18.7

С учетом (18.5), (18.7) — (18.9) получаем результат

$$q_k = DW_{jk}(i\Omega)e^{i\Omega t} = DR_{jk}(\Omega)e^{i(\Omega t + \psi_{jk}(\Omega))} \quad (18.10)$$

— отклик системы (18.3) на воздействие (18.4).

Рассмотрим, как, опираясь на амплитудно-фазовую характеристику, находить отклики на воздействия, отличные от (18.4).

Гармоническое воздействие. Подстановка (18.4) и (18.10) в систему (18.3) превратит ее в тождественное равенство двух комплексных выражений. Равенство мнимых частей с учетом линейности системы (18.3) приводит к выводу, что воздействию

$$Q_l = \delta_{lj}D \sin \Omega t \quad (18.11)$$

соответствует отклик

$$q_k = DR_{jk}(\Omega) \sin\{\Omega t + \psi_{jk}(\Omega)\}, \quad (18.12)$$

т. е. гармонический сигнал (18.11) при прохождении через линейную систему не меняет частоту Ω , а в зависимости от частоты амплитуда домножается на $R_{jk}(\Omega)$ и добавляется фаза $\psi_{jk}(\Omega)$. Числа $R_{jk}(\Omega)$ и $\psi_{jk}(\Omega)$ можно определить графически: на рис. 18.3 для амплитудно-фазовой характеристики показаны $R_{jk}(\Omega)$, $\psi_{jk}(\Omega)$. при $\Omega = 3$. Напомним, что отклик (18.12) установится через некоторое время после того, как будет можно пренебречь собственными движениями системы, зависящими от начальных данных.

Периодическое негармоническое воздействие. Разложим воздействие в ряд Фурье

$$Q_l = \delta_{lj} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \sin m\Omega t + b_m \cos m\Omega t).$$

Для каждого слагаемого отклик находится при помощи амплитудно-фазовой характеристики. С учетом принципа суперпозиции получим суммарный отклик

$$q_k = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m R_{jk}(m\Omega) \sin[m\Omega t + \psi_{jk}(m\Omega)] + b_m R_{jk}(m\Omega) \cos[m\Omega t + \psi_{jk}(m\Omega)]\}.$$

Непериодическое воздействие $Q(t)\delta_{lj}$. Для нахождения отклика требуется использовать интеграл Фурье. Укажем, не вдаваясь в подробности, последовательность действий. Для функции $Q(t)$ вычисляется ее Фурье-образ $\Phi(i\Omega)$. Отклику $q_k(t)$ соответствует Фурье-образ $W_{jk}(i\Omega)\Phi(i\Omega)$; обратным преобразованием Фурье находится отклик $q_k(t)$.

Рассмотренный подход к изучению свойств системы носит название частотного. До сих пор основным объектом, определяющим поведение системы, были дифференциальные уравнения. При частотном подходе информация о внутренней структуре системы дается амплитудно-фазовой характеристикой в аналитическом или графическом виде. Амплитудно-фазовую характеристику можно построить экспериментально, не привлекая дифференциальных уравнений (18.3). Для этого нужно подавать на вход гармоническое воздействие (18.11) с разными частотами. Отклик (18.12) ставит в соответствие каждой частоте Ω числа $R_{jk}(\Omega)$ и $\psi_{jk}(\Omega)$, которые определяют точку на графике (рис. 18.3). Построенный с нужной точностью график дает возможность вычислять реакцию системы на воздействия, отличные от гармонического, а также решать другие вопросы. Приведем для иллюстрации способ вычисления переходного процесса. Пусть на систему, находящуюся в положении равновесия, при $t = 0$ подается единичное воздействие $Q_l = \delta_{lj}$ (гармонический сигнал с $\Omega = 0$). После затухания собственных движений установится выход $q_k = R_{jk}(0) = W_{jk}(0) = P_{jk}(0)$. Для приложений представляет интерес переходный процесс: поведение системы в процессе затухания собственных движений. Вычисления, которые мы опустим, приводят

к формуле¹

$$q_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_{jk}(\Omega) \frac{\sin \Omega t}{\Omega} d\Omega,$$

т. е. переходный процесс полностью определен действительной частью $P_{jk}(\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики.

¹Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 452 с.

Г л а в а V. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

§ 19. Канонические уравнения Гамильтона

Уравнения Гамильтона можно составлять для таких систем, динамика которых полностью задается функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. Рассматриваются не только натуральные (механические) системы ($L = T - \Pi$), поэтому на L накладывается условие (0.3)

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0, \quad (19.1)$$

при котором уравнения Лагранжа (0.2) имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + G_i(t, q, \dot{q}) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

и разрешимы относительно \ddot{q}_k . Для натуральных систем матрица в условии (19.1) есть матрица квадратичной формы в кинетической энергии, и условие (19.1) является следствием определения обобщенных координат. Уравнения Гамильтона выводятся как результат перехода от переменных Лагранжа t, q, \dot{q} , описывающих состояние системы, к переменным Гамильтона t, q, p . Обобщенные импульсы связаны с переменными t, q, \dot{q} следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \varphi_i(t, q, \dot{q}). \quad (19.2)$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (19.3)$$

с учетом обозначения (19.2) допускают эквивалентную запись

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (19.4)$$

Решив систему (19.2) относительно \dot{q}_k , получим обратный переход

$$\dot{q}_k = \psi_k(t, q, p) \quad (19.5)$$

от гамильтоновых переменных t, q, p к лагранжевым. Возможность перехода от (19.2) к (19.5) гарантируется условием (19.1):

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0.$$

Введем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(t, q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \Big|_{\dot{q}=\psi(t, q, p)} - L(t, q, \dot{q}) \Big|_{\dot{q}=\psi(t, q, p)}. \quad (19.6)$$

В частности, для натуральных систем, когда справедливо

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi,$$

подсчет H приводит к результату

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi = T_2 - T_0 + \Pi$$

(использована теорема Эйлера об однородных функциях). Для стационарно заданной системы ($T = T_2$) функция Гамильтона

$$H = T \Big|_{\dot{q}=\psi(q, p)} + \Pi \quad (19.7)$$

есть полная энергия в гамильтоновых переменных t, q, p .

Вывод уравнений Гамильтона (гамильтоновой системы) основан на подсчете первого полного дифференциала от выражения (19.6)

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \end{aligned}$$

Следствие (19.2) первая и последняя суммы в правой части взаимно уничтожаются, и выражение принимает вид равенства двух дифференциальных форм, причем обе формы содержат дифференциалы от независимых переменных t, q, p . Приравнявая коэффициенты при дифференциалах, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (19.8)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (19.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (19.10)$$

Уравнения (19.9) есть следствие замены переменных (19.2) и совпадают с (19.5). Уравнениям (19.10) при помощи уравнений Лагранжа в форме (19.4) можно придать вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (19.11)$$

Для натуральных систем полученные уравнения есть следствие основной аксиомы динамики — второго закона Ньютона. Совокупность уравнений (19.9) и (19.11) приводит к системе канонических уравнений Гамильтона (гамильтоновой системе):

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (19.12)$$

Построение, исходя из функции Гамильтона $H(t, q, p)$, функции Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ возможно, если для $H(t, q, p)$, выполняется

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right\| \neq 0. \quad (19.13)$$

Условие (19.13) гарантирует принципиальную возможность алгебраически решить уравнения $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ (см. (19.12)) относительно p_k , т. е. получить равенство (19.2), с учетом которого формула (19.6) приведет к нужному результату:

$$L(t, q, \dot{q}) = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(t, q, p) \right\} \Big|_{p=\varphi(t, q, \dot{q})}. \quad (19.14)$$

С точки зрения механики уравнения (19.12) имеют особенность — они в каноническом виде, т. е. разрешены относительно производных \dot{q}_i, \dot{p}_i . С точки зрения теории дифференциальных уравнений особенностью является то, что правая часть системы (19.12) определяется

одной функцией H . Вследствие указанных особенностей уравнения Гамильтона обладают особыми свойствами как с точки зрения механики, так и с точки зрения теории дифференциальных уравнений. С этих позиций рассмотрим вопрос о первых интегралах системы (19.12).

**§ 20. Первые интегралы гамильтоновых систем.
Теорема Якоби–Пуассона. Уравнения Уиттекера**

Определение 20.1. *Первым интегралом уравнений (19.12) называется функция $f(t, q, p)$, которая при подстановке в нее любого решения $q(t), p(t)$ системы (19.12) сохраняет как функция t свое значение*

$$f(t, q(t), p(t)) = f(t_0, q_0, p_0) = \text{const.} \quad (20.1)$$

Дифференцирование (20.1) по t в силу уравнений (19.12) даст эквивалентное условие

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (20.2)$$

которое связывает первый интеграл f с соответствующей функцией Гамильтона H . Условие (20.2) примет компактный вид, если ввести понятие скобки Пуассона (φ, ψ) от двух функций $\varphi(t, q, p)$, $\psi(t, q, p)$ гамильтоновых переменных

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right). \quad (20.3)$$

С учетом (20.3) условие (20.2) запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

С использованием скобок Пуассона (20.3) уравнения Гамильтона (19.12) можно записать в симметричной форме

$$\dot{q}_i = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = (p_i, H).$$

Непосредственно по определению (20.3) проверяются следующие свойства скобок Пуассона:

1. $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$;
2. $(\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i, \psi) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\varphi_i, \psi)$, $\lambda = \text{const}$;
3. $((\varphi, f), \psi) + ((f, \psi), \varphi) + ((\psi, \varphi), f) = 0$ (тождество Пуассона);
4. $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = (\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi) + (\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t})$.

Заметим, что если для элементов векторного пространства определена бинарная операция (\cdot, \cdot) , удовлетворяющая условиям 1 – 3, то пространство есть **алгебра Ли**. Другим примером алгебры Ли является трехмерное векторное пространство с операцией векторного умножения.

Понятие скобки Пуассона полезно, в частности, тем, что дает возможность по двум первым интегралам простыми вычислениями подсчитать еще один первый интеграл.

Теорема 20.1 (К.Якоби–С.Пуассон). *Скобка Пуассона (φ, ψ) от первых интегралов гамильтоновой системы есть первый интеграл той же системы.*

□ Условие теоремы утверждает следующее:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} + ((\varphi, \psi), H) = 0.$$

С учетом свойств 4, 1 и 3 получим:

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi) + (\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) + ((\varphi, \psi), H) = \\ & = -((\varphi, H), \psi) - (\varphi, (\psi, H)) + ((\varphi, \psi), H) = \\ & = ((H, \varphi), \psi) + ((\psi, H), \varphi) + ((\varphi, \psi), H) = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. ■

Другая формулировка теоремы 20.1: множество первых интегралов конкретной гамильтоновой системы — алгебра Ли.

Рассмотрим пример, когда скобка Пуассона двух первых интегралов приводит к первому интегралу, который функционально независим от исходных. В однородном поле силы тяжести (ось z вертикальна) сохраняются функции

$$p_x = m\dot{x}, \quad k_z = yp_x - xp_y = m(y\dot{x} - x\dot{y})$$

— проекция импульса на ось x и проекция момента импульса на ось z . Скобка Пуассона (p_x, k_z) есть независимый первый интеграл $p_y = m\dot{y}$ — проекция импульса на ось y . Отметим, что первый интеграл p_y является следствием не только сохранения величин p_x, k_z , но и того обстоятельства, что динамика системы определяется уравнениями Гамильтона (см. теорему 20.1).

Для нахождения всех функционально независимых первых интегралов — количеством $2n$ — требуется интегрировать уравнение в частных производных (20.2). Приведем несколько особенностей функции Гамильтона $H(t, q, p)$, благодаря которым первые интегралы обнаруживаются без вычислений.

Определение 20.2. Координата q_k называется **циклической**, если функция Гамильтона от нее не зависит:

$$H = H(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Теорема 20.2. Циклической координате q_k соответствует первый интеграл p_k .

□ Утверждение следует из уравнений Гамильтона (19.12):

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \blacksquare$$

Примечательно то, что при помощи циклической координаты можно не на единицу, как обычно, а на две единицы понизить порядок системы (19.12). Для этого рассматривается замкнутая система

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \neq k, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{20.4}$$

В правой части q_k отсутствует в силу цикличности, а p_k заменяется произвольной постоянной C_k . После интегрирования системы (20.4) зависимость $q_k(t)$ находится квадратурой (см. (19.12)):

$$q_k = \int \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, q_1(t), \dots, q_{k-1}(t), q_{k+1}(t), \dots, q_n(t), \\ p_1(t), \dots, p_{k-1}(t), C_k, p_{k+1}(t), \dots, p_n(t)) dt.$$

Определение 20.3. Система называется **обобщенно-консервативной**, если функция Гамильтона $H(q, p)$ не зависит от времени t .

Теорема 20.3. Функция Гамильтона $H(q, p)$ обобщенно-консервативной системы является первым интегралом соответствующей гамильтоновой системы (19.12):

$$H(p, q) = h. \quad (20.5)$$

□ Подстановка $H(q, p)$ в условие (20.2) для первого интеграла приводит к тождеству. ■

Для натуральных систем этот результат есть закон сохранения полной энергии для консервативных систем (см. (19.6)).

Если функция Гамильтона $H(q, p)$ удовлетворяет условию (19.13), то $H(q, p)$ по формуле (19.14) ставится в соответствие функция Лагранжа $L(q, \dot{q})$, и теорему 20.3 можно сформулировать в лагранжевых переменных. Так как соответствующий результат обосновывается независимо от условий (19.13) или (19.1), докажем его отдельно.

Теорема 20.4. Пусть функция Лагранжа $L(q, \dot{q})$ независит явно от времени t . Тогда на решениях уравнений Лагранжа (19.3) сохраняется функция

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (20.6)$$

— функция Гамильтона (19.6) в лагранжевых переменных.

□ К утверждению теоремы приводит непосредственная проверка:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = 0. \blacksquare$$

Обобщенно-консервативные системы так же, как в случае циклической координаты, допускают понижение порядка уравнений Гамильтона (19.12) на две единицы.

Теорема 20.5. *Интегрирование системы (19.12) порядка $2n$, соответствующей обобщенно-консервативной системе, сводится к интегрированию гамильтоновой системы порядка $2n-2$.*

□ Предполагаем, что уравнение (20.5) разрешимо относительно некоторого импульса p_k (в противном случае $-H = H(q_1, \dots, q_n) -$ решение системы (19.12) очевидно). Считаем, что уравнение (20.5) разрешимо относительно p_1 :

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h). \quad (20.7)$$

Тождество

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, \overbrace{-K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)}^{p_1}, p_2, \dots, p_n) = h$$

продифференцируем по $q_i, p_i, i = \overline{2, n}$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial K}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = \overline{2, n},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial K}{\partial p_i} \right) = 0, \quad i = \overline{2, n},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} -\frac{\partial K}{\partial q_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad i = \overline{2, n}, \\ \frac{\partial K}{\partial p_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Уравнения (19.12) с учетом (20.8) определяют замкнутую гамильтонову систему порядка $2n-2$

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dq_1} &= \left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = \overline{2, n}, \\ \frac{dp_i}{dq_1} &= \left(\frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (20.9)$$

правые части которой есть функции от независимой переменной q_1 и искомым функций $q_i(q_1), p_i(q_1), i = \overline{2, n}$ (см. (20.7)). Для нахождения $q_i(t), p_i(t), i = \overline{1, n}$, следует систему (20.9) проинтегрировать. Подстановка решения $q_i(q_1), p_i(q_1), i = \overline{2, n}$, в уравнение $\dot{q}_1 = \partial H / \partial p_1 = g(q, p)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= g(q_1, q_2(q_1), \dots, q_n(q_1), \\ &\quad \overbrace{-K(q_1, q_2(q_1), \dots, q_n(q_1), p_2(q_1), \dots, p_n(q_1), h)}^{p_1}, \\ &\quad p_2(q_1), \dots, p_n(q_1)) = G(q_1, h). \end{aligned}$$

Результат $q_1(t)$ интегрирования с учетом $q_i(q_1), p_i(q_1), i = \overline{2, n}$ и (20.7) определяет общее решение $q_i(t), p_i(t), i = \overline{1, n}$ уравнений Гамильтона (19.12). ■

Функция $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$ в (20.7) называется **функцией Уиттекера**, уравнения (20.9) — **уравнениями Уиттекера** (в § 24 уравнения (20.9) выводятся иным путем).

Определение 20.4. Координата q_k называется **отделимой**, если от нее и от соответствующего ей импульса функция Гамильтона $H(q, p)$ зависит следующим образом

$$\begin{aligned} H &= H(t, z, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n), \\ z &= f(q_k, p_k). \end{aligned} \tag{20.10}$$

Циклическая координата q_k — частный случай отделимой координаты: $z = f(q_k, p_k) = p_k$.

Теорема 20.6 Отделимой координате q_k соответствует первый интеграл $z = f(q_k, p_k)$.

□ Вычисления с учетом (19.12) и (20.10)

$$\begin{aligned} \frac{df(q_k, p_k)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0 \end{aligned}$$

приводят к нужному результату $f(q_k, p_k) = C$. ■

Пример 20.1. Частице в поле всемирного тяготения в сферических координатах соответствует функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\beta}{r}$$

и функция Гамильтона (см. (19.2), (19.4), (19.6))

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\beta}{r}. \quad (20.11)$$

Координата φ — циклическая, что влечет по теореме 20.2 существование первого интеграла

$$p_\varphi = C_1. \quad (20.12)$$

Система с гамильтонианом (20.11) — обобщенно-консервативна и вследствие теоремы 20.3 функция $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = h_0$ — первый интеграл. С учетом (20.12) функции (20.11) можно придать требуемый теоремой 20.6 вид

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{z}{r^2} \right) - \frac{\beta}{r}, \quad z = p_\theta^2 + \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta},$$

т. е. функция

$$z = p_\theta^2 + \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta} = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = C_2 \quad (20.13)$$

— первый интеграл. Естественное желание увеличить при помощи теоремы 20.1 количество функционально независимых первых интегралов приводит к неудаче: для каждой из трех скобок Пуассона выполняется $(\cdot, \cdot) \equiv 0$. Именно это — огорчительное на первый взгляд — обстоятельство дает возможность, не интегрируя и даже не составляя уравнений Гамильтона (19.12), решить задачу до конца: построить дополнительные к (20.11) — (20.13) три первых интеграла (§ 31).

Пример 20.2. Система, определенная гамильтонианом (20.11), является представителем достаточно широкого класса систем, заданных функцией Гамильтона (H, F_1, F_2 — произвольные функции)

$$H(F_2(F_1(q_1, p_1), q_2, p_2), p_3, q_4, p_4). \quad (20.13)$$

Аналогично примеру 20.1, последовательное применение теорем 20.2, 20.3, 20.5 приводит к первым интегралам

$$\begin{aligned}
 F_1(q_1, p_1) &= \alpha_1, \\
 F_2(\alpha_1, q_2, p_2) &= F_2(F_1(q_1, p_1), q_2, p_2) = \alpha_2, \\
 p_3 &= \alpha_3, \\
 H(\alpha_2, \alpha_3, q_4, p_4) &= H(F_2(F_1(q_1, p_1), q_2, p_2), p_3, q_4, p_4) = \alpha_4.
 \end{aligned}
 \tag{20.14}$$

Также, как в примере 20.1, для каждой из шести скобок Пуассона функций (20.14) выполняется $(\cdot, \cdot) = 0$, что позволит в § 31 удвоить количество первых интегралов.

§ 21. Принцип Гамильтона. Замена переменных в уравнениях Лагранжа

Принцип Гамильтона являет собой пример вариационного подхода к исследованию вопроса: возможно ли движение $\tilde{q}(t)$ у конкретной механической системы или такое движение реализоваться не может. Далее график возможного движения в расширенном координатном пространстве будем для краткости называть **прямым путем**, а невозможного — **окольным** (рис. 21.1).

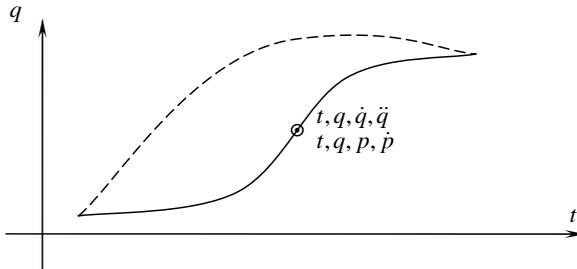


Рис. 21.1

Выделение прямых путей с помощью дифференциальных уравнений носит «микроскопический» характер: достаточно сколь угодно малой окрестности точки графика, чтобы извлечь числа t, q, \dot{q}, \ddot{q} (или t, q, p, \dot{p}), и, если в каждой точке эти числа удовлетворяют уравнениям Лагранжа (19.3) или уравнениям Гамильтона (19.12), то путь является прямым. Вариационный подход является «макроскопическим»: некоторый функционал ставит в соответствие число конечному участку пути, и в зависимости от поведения функционала

при деформации (варьировании) пути — пунктир на рисунке 21.1 — решается вопрос о принадлежности пути к прямым или окольным. Введем точную терминологию.

Определение 21.1. Проварьировать путь $\tilde{q}(t)$ означает включить его в однопараметрическое семейство путей $q(t, \alpha)$, причем выполняется $\tilde{q}(t) = q(t, 0)$. Значение функционала зависит от граничных точек пути, поэтому для каждого члена семейства должны быть указаны: начальная точка $t_0(\alpha)$, $q^0(\alpha) = q(t_0(\alpha), \alpha)$ и конечная — $t_1(\alpha)$, $q^1(\alpha) = q(t_1(\alpha), \alpha)$ (рис. 21.2).

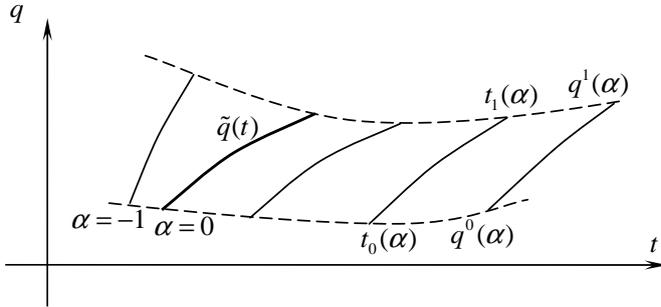


Рис. 21.2

Определение 21.2. Вариация $\delta\Phi$ функции $\Phi(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, p, \dot{p})$ есть дифференциал по α

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

например,

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i(t, \alpha)}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

$$\delta L(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right).$$

Определение 21.3. Действием по Гамильтону называется функционал

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt, \quad (21.1)$$

для подсчета которого конкретный путь $q(t)$ подставляется в функцию Лагранжа, полученная функция времени $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ интегрируется в заданных пределах t_0, t_1 .

Далее потребуется формула вариации действия по Гамильтону. Имеется ввиду следующее: путь $\tilde{q}(t)$ варьируется (включается в семейство $q(t, \alpha)$), для каждого члена семейства вычисляется действие по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(t, q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)) dt \quad (21.2)$$

и строится его вариация

$$\delta W = \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Теорема 21.1. Вариация действия по Гамильтону определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta W &= \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right] \Big|_1 - \\ &- \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right] \Big|_0 - \\ &- \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (21.3)$$

В квадратных скобках в качестве p_i и H обозначены величины (см. (19.2), (19.5))

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (21.4)$$

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (21.5)$$

с подстановкой вместо t, q, \dot{q} значений в начальной и конечной точках пути, соответствующего параметру α . Вариации $\delta q_i, \delta t$ в квадратных скобках вычисляются на кривых начальных и конечных значений.

□ Вариация δq_i под интегралом вычисляется при фиксированном времени:

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

а вариации $\delta t, \delta q_i$ в квадратных скобках — с учетом того, что на кривых граничных данных при изменении α изменяются и t и q_i . Например, при $t = t_1(\alpha)$:

$$\delta t|_{t_1(\alpha)} = \frac{\partial t_1(\alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad (21.6)$$

$$\begin{aligned} \delta q_i |_{t_1(\alpha)} &= \delta q_i(t_1(\alpha), \alpha) = \frac{dq_i(t_1(\alpha), \alpha)}{d\alpha} \delta(\alpha) = \\ &= \frac{\partial q_i(t_1(\alpha), \alpha)}{\partial t} \delta t|_{t_1(\alpha)} + \frac{\partial q_i(t_1(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha = \\ &= \dot{q}_i|_{t_1(\alpha)} \delta t|_{t_1(\alpha)} + \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{t_1(\alpha)} \delta \alpha. \end{aligned} \quad (21.7)$$

В процессе доказательства формулы (21.3) использованы формулы (21.6), (21.7) и обозначения

$$f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}, \quad L_0 = L(t_0(\alpha), q^0(\alpha), \dot{q}^0(\alpha)), \quad L_1 = L(t_1(\alpha), q^1(\alpha), \dot{q}^1(\alpha)).$$

Для обоснования формулы (21.3) продифференцируем действие (21.2) по α :

$$\begin{aligned} W'(\alpha) &= L_1 t'_1 - L_0 t'_0 + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} q'_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}'_i \right) dt = \\ &= L_1 t'_1 - L_0 t'_0 + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} q'_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q'_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q'_i \right) \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_1 t'_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{t_1(\alpha)} - \\
&\quad - L_0 t'_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{t_0(\alpha)} - \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q'_i dt = \\
&= L_1 t'_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dq_i(t_1(\alpha), \alpha)}{d\alpha} - \dot{q}_i(t, \alpha) \Big|_{t_1(\alpha)} t'_1 \right) - \\
&\quad - L_0 t'_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dq_i(t_0(\alpha), \alpha)}{d\alpha} - \dot{q}_i(t, \alpha) \Big|_{t_0(\alpha)} t'_0 \right) - \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q'_i dt = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i(t_1(\alpha), \alpha)}{d\alpha} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big|_{t_1(\alpha)} \right) t'_1 - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i(t_0(\alpha), \alpha)}{d\alpha} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big|_{t_0(\alpha)} \right) t'_0 - \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q'_i dt.
\end{aligned}$$

Умножение на $\delta\alpha$ и использование обозначений (21.4) – (21.7) приводит к формуле (21.3). ■

При формулировке принципа Гамильтона используется специальное варьирование: все представители семейства $q(t, \alpha)$ имеют одинаковые начальные и конечные точки

$$q(t_0, \alpha) = q^0, \quad q(t_1, \alpha) = q^1 \quad (21.8)$$

(рис. 21.3).

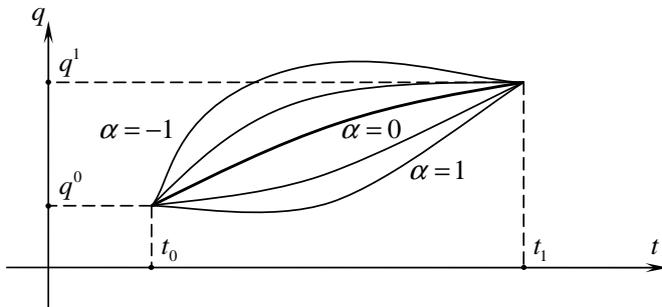


Рис. 21.3

При таком варьировании квадратные скобки в (21.3) обращаются в ноль, и формула принимает вид

$$\delta W = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \quad (21.9)$$

Для обоснования принципа Гамильтона сформулируем без доказательства утверждение из вариационного исчисления.

Теорема 21.2. Пусть $h(x)$ — непрерывная на интервале $[a, b]$ функция и для любой непрерывной на том же интервале функции $g(x)$ выполняется

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = 0.$$

Тогда справедливо $h(x) \equiv 0$.

Теорема 21.3 (Принцип Гамильтона). Путь $\tilde{q}(t)$ является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t, \alpha)$, удовлетворяющем (21.8), для вариации действия по Гамильтону на этом пути выполняется

$$\delta W|_{\alpha=0} = 0.$$

□ Принцип Гамильтона утверждает следующее:

$$\{\tilde{q}(t) \text{ — прямой путь}\} \iff \left\{ \forall \delta q_i = \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \delta \alpha, \delta W|_{\alpha=0} = 0 \right\}.$$

Утверждение \Rightarrow непосредственно следует из (21.9): так как прямой путь удовлетворяет уравнениям Лагранжа (19.3), выражения в круглых скобках под интегралом (21.9) обращаются в нуль. Утверждение \Leftarrow есть следствие независимости обобщенных координат (возможно варьирование, при котором $\delta q_k \neq 0$, $\delta q_i = 0$, $i \neq k$) и теоремы 21.2. ■

Принципом (началом) в классической механике называют утверждение, которое можно принять за основную динамическую аксиому. Доказательство принципа Гамильтона есть по существу вывод для натуральных систем эквивалентности с другим принципом — вторым законом Ньютона:

$$\begin{aligned} &\{\text{Второй закон Ньютона}\} \\ &\quad \Updownarrow \\ &\{\text{Уравнения Лагранжа}\} \\ &\quad \Updownarrow \\ &\{\text{Принцип Гамильтона}\}. \end{aligned}$$

В качестве примера применения принципа Гамильтона исследуем преобразование уравнений Лагранжа при заменах переменных. Система (19.3) определена функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. Всевозможные решения $q(t)$ системы при помощи неособенной замены переменных $\{t, q\} \longleftrightarrow \{\hat{t}, \hat{q}\}$ преобразуются в функции $\hat{q}(\hat{t})$. Спрашивается: будут ли функции $\hat{q}(\hat{t})$ решениями уравнений Лагранжа (19.3), порожденных некоторой функцией $\hat{L}(\hat{t}, \hat{q}, \dot{\hat{q}})$? Положительный ответ на этот вопрос дают следующие рассуждения. Возьмем произвольный прямой путь $q(t)$ в исходных переменных и произвольным (с учетом (21.8)) образом его проварьируем. Для действия по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L \left(t, q(t, \alpha) \frac{dq(t, \alpha)}{dt} \right) dt \quad (21.10)$$

в силу принципа Гамильтона имеем при $\alpha = 0$ стационарную точку. В формуле для прямого пути $q(t)$ и в интеграле (21.10) сделаем переход к новым переменным

$$\begin{aligned} t &= t(\hat{t}, \hat{q}), \\ q &= q(\hat{t}, \hat{q}). \end{aligned} \quad (21.11)$$

Результат варьирования $q(t, \alpha)$ прямого пути отобразится в пространство новых переменных: $\hat{q}(\hat{t}, \alpha)$. Действие по Гамильтону $W(\alpha)$ есть вычисление одного и того же интеграла в разных переменных, поэтому в новых переменных функция $W(\alpha)$ останется прежней. По-прежнему $\alpha = 0$ есть стационарная точка $W(\alpha)$, поэтому в силу принципа Гамильтона образ $\hat{q}(\hat{t})$ прямого пути $q(t)$ есть решение уравнений Лагранжа, а функция Лагранжа \hat{L} совпадает с функцией, стоящей под интегралом в новых переменных. Подсчет этой функции приводит к результату

$$\hat{L}(\hat{t}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = L \left(t(\hat{t}, \hat{q}), q(\hat{t}, \hat{q}), \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\hat{t}, \hat{q}}, \left. \frac{dt}{d\hat{t}} \right|_{\hat{t}, \hat{q}} \right), \quad (21.12)$$

где использовано преобразование (21.11) и обозначено

$$\left. \frac{dq_i}{dt} \right|_{\hat{t}, \hat{q}} = \frac{\frac{\partial q_i(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{t}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{q}_k} \dot{\hat{q}}_k}{\frac{\partial t(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{t}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial t(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{q}_k} \dot{\hat{q}}_k},$$

$$\left. \frac{dt}{d\hat{t}} \right|_{\hat{t}, \hat{q}} = \frac{\partial t(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{t}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial t(\hat{t}, \hat{q})}{\partial \hat{q}_k} \dot{\hat{q}}_k.$$

Заметим, что по множеству решений $\hat{q}(\hat{t})$ нельзя однозначно восстановить функцию Лагранжа. Принцип Гамильтона дает результат (21.12) одного из таких восстановлений.

Другие функции Лагранжа \hat{L}^* можно получить, например, добавлением к \hat{L} полной производной по времени от некоторой функции $f(\hat{t}, \hat{q})$:

$$\hat{L}^* = \hat{L} + \frac{df(\hat{t}, \hat{q})}{d\hat{t}}. \quad (21.13)$$

Действительно, действия W , W^* , соответствующие функциям \hat{L} и \hat{L}^* , при любом варьировании различаются на одно и то же число $f(\hat{t}_1, \hat{q}_1) - f(\hat{t}_0, \hat{q}_0)$:

$$W^*(\alpha) = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \left(\hat{L} + \frac{df}{d\hat{t}} \right) d\hat{t} = W(\alpha) + f(\hat{t}_1, \hat{q}_1) - f(\hat{t}_0, \hat{q}_0),$$

поэтому при $\alpha = 0$ действия W , W^* одновременно принимают или не принимают стационарное значение.

Таким образом, если путь является решением системы (19.3) с лагранжианом \hat{L} , то он же в силу принципа Гамильтона есть решение системы с функцией Лагранжа (21.13).

§ 22. Теорема Эмми Нётер

Теорема Нётер связывает симметрии в уравнениях Лагранжа (0.2) с законами сохранения — первыми интегралами. Применительно к уравнениям Лагранжа введем несколько понятий.

Определение 22.1. Преобразование симметрии в уравнениях Лагранжа — неособенное преобразование $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ расширенного координатного пространства $R^{n+1}(t, q)$, поточечно переводящее каждое решение $q(t)$ в решение $\hat{q}(\hat{t})$ той же системы.

В частности, преобразование $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ является преобразованием симметрии, если оно связано с лагранжевой системой следующим образом:

$$L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}} \quad (22.1)$$

— обе части образованы одной и той же функцией $L(\cdot, \cdot, \cdot)$. Действительно, решение $q(t)$ системы, соответствующей функции Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, под действием преобразования переходит в решение $\hat{q}(\hat{t})$ системы, соответствующей функции $\hat{L}(\hat{t}, \hat{q}, d\hat{q}/d\hat{t})$, вычисленной по формуле (21.12). «Снятие шляпы» с \hat{L} в (21.12) означает: $\hat{q}(\hat{t})$ — решение той же системы, что и $q(t)$.

Определение 22.2. Преобразование вариационной симметрии в системе с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, — неособенное преобразование $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ расширенного координатного пространства $R^{n+1}(t, q)$, удовлетворяющее условию (22.1).

Вариационными симметриями не исчерпываются симметрии по определению 22.1. Например, если вместо формулы (22.1) имеет место соотношение (такие симметрии называются **дивергентными**)

$$L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) + \frac{df(\hat{t}, \hat{q})}{d\hat{t}} = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}},$$

то также, как в случае (22.1), в силу преобразования выполняется:

$$\{q(t) - \text{решение}\} \Rightarrow \{\hat{q}(\hat{t}) - \text{решение той же лагранжевой системы}\}$$

(см. формулу (21.13) и сопутствующие формуле рассуждения).

Аналогично, если лагранжева система (0.2) и преобразование $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ связаны соотношением (такие симметрии называются **конформными**)

$$L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = cL(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}}, \quad c = \text{const},$$

то в силу однородности системы (0.2) относительно L также справедливо утверждение

$$\{q(t) - \text{решение}\} \Rightarrow \{\hat{q}(\hat{t}) - \text{решение той же лагранжевой системы}\}.$$

Определение 22.3. Однопараметрическая группа преобразований пространства $R^{n+1}(t, q)$ — решение

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \hat{t}(t, q, \tau), \\ \hat{q}_i &= \hat{q}_i(t, q, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{22.2}$$

автономной (стационарной) системы уравнений (независимая переменная — групповой параметр τ)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{d\tau} &= \xi(\hat{t}, \hat{q}), \\ \frac{d\hat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i(\hat{t}, \hat{q}), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{22.3}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} \hat{t}(0) &= t, \\ \hat{q}_i(0) &= q_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Групповая сущность преобразований (22.2) далее не используется, поэтому не обсуждается.

По уравнениям (22.2) группы правые части системы (22.3) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\xi(t, q) &= \left. \frac{\partial \hat{t}(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \\ \eta_i(t, q) &= \left. \frac{\partial \hat{q}_i(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (22.5)$$

Определение 22.3. *Группа (22.2) является группой вариационных симметрий для системы с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, если любое ее преобразование (при фиксированном значении τ) — преобразование вариационной симметрии в смысле определения 22.2.*

Для проверки: удовлетворяет ли пара $\{L(t, q, \dot{q})$ и группа (22.2) определению (22.4), — удобнее условие (22.1) записать в эквивалентной форме

$$L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) \frac{d\hat{t}}{d\hat{t}} = L(t, q, \dot{q}). \quad (22.6)$$

Условие (22.1) «обслуживает» переход $t, q \longrightarrow \hat{t}, \hat{q}$, а (22.6) — переход $\hat{t}, \hat{q} \longrightarrow t, q$.

Теорема 22.1 (Эмми Нётер.) *Пусть группа (22.2) — группа вариационных симметрий для лагранжевой системы, определенной функцией $L(t, q, \dot{q})$. Тогда у системы есть первый интеграл*

$$w = \sum_{i=1}^n p_i \eta_i - \xi H, \quad (22.7)$$

где ξ, η_i — функции (22.5), а p_i, H — обозначения (19.4) для обобщенного импульса и (19.6) для функции Гамильтона:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(t, q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}). \quad (22.8)$$

□ Потребуется формулы (учтены обозначения (22.5), то, что при $\tau = 0$ вследствие (22.4) справедливы равенства $\hat{t} = t, \hat{q} = q$, и перестановочность дифференцирования по независимым переменным t и τ)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{d\hat{t}}{d\hat{t}} = \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{d\xi}{dt}, \quad (22.9)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}} = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{\frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}}}{\frac{d\hat{t}}{dt}} = \\
& = \frac{\left(\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}} \right) \frac{d\hat{t}}{dt} \Big|_{\tau=0} - \left(\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{d\hat{t}}{dt} \right) \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}}}{\left(\frac{d\hat{t}}{dt} \right)^2 \Big|_{\tau=0}} = \quad (22.10) \\
& = \frac{d}{dt} \frac{d\hat{q}_i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} - \left(\frac{d}{dt} \frac{d\hat{t}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \right) \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\eta_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\xi}{dt}.
\end{aligned}$$

Утверждение (22.7) доказывается дифференцированием условия (22.6) по τ при $\tau = 0$ с учетом формул (22.4), (22.9), (22.10), уравнений Лагранжа (0.2) и обозначений (22.5), (22.8):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial t} \xi + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\eta_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\xi}{dt} \right) + L \frac{d\xi}{dt} = \\
& = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i - \xi \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \right\} = \frac{dw}{dt} = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Пример 22.1 (В.Ф.Журавлев). Для свободной частицы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \quad (22.11)$$

делается замена переменных (α, β — постоянные, τ — групповой параметр)

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= te^{\alpha\tau}, \\
\hat{q} &= qe^{\beta\tau}.
\end{aligned} \quad (22.12)$$

Подстановка (22.11) и (22.12) в левую часть условия (22.6) для вариационной симметрии приводит к результату

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} \right)^2 \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 e^{(\alpha-2\beta)\tau}$$

и к выводу, что (22.12) — группа вариационных симметрий для системы с функцией Лагранжа (22.11) при $\alpha - 2\beta = 0$, например, при $\alpha = 2, \beta = 1$. При этих значениях формулы (22.5) и (22.8) приводят к функциям

$$\xi = 2t, \quad \eta = q, \quad p = \dot{q}, \quad H = L = \frac{1}{2}\dot{q}^2,$$

которые определяют первый интеграл (22.7)

$$w = \dot{q}q - tq^2.$$

В следующем примере теорема 22.1 обосновывает сохранение для замкнутой системы полной механической энергии, импульса и момента импульса.

Пример 22.2. Положение материальных точек задается в ортонормированной системе координат:

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Предполагается, что потенциальная энергия $\Pi(r_{ik})$ зависит только от расстояний r_{ik} между точками:

$$r_{ik}^2 = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2.$$

Системе соответствует функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \Pi(r_{ik}), \quad (22.13)$$

обобщенные импульсы

$$p_i^x = m_i \dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i \dot{y}_i, \quad p_i^z = m_i \dot{z}_i$$

и функция Гамильтона (в лагранжевых переменных)

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \Pi(r_{ik}).$$

Запишем также левую часть условия (22.6) для проверки конкретного преобразования на вариационную симметрию:

$$L \frac{d\hat{t}}{dt} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\left(\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{t}} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{y}_i}{d\hat{t}} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{z}_i}{d\hat{t}} \right)^2 \right] - \Pi(\hat{r}_{ik}) \right\} \frac{d\hat{t}}{dt}, \quad (22.14)$$

где обозначено

$$\hat{r}_{ik}^2 = (\hat{x}_i - \hat{x}_k)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_k)^2 + (\hat{z}_i - \hat{z}_k)^2. \quad (22.15)$$

Приведем несколько групп вариационных симметрий для системы с функцией Лагранжа (22.13), соответствующие группам функции (22.5) и первые интегралы (22.7):

$$w = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i \eta_i^x + \dot{y}_i \eta_i^y + \dot{z}_i \eta_i^z) - \xi H. \quad (22.16)$$

1. Сдвиг по времени t

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t - \tau, & \hat{x}_i &= x_i, & \hat{y}_i &= y_i, & \hat{z}_i &= z_i; \\ \xi &= -1, & \eta_i^x &= 0, & \eta_i^y &= 0, & \eta_i^z &= 0. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Подстановка преобразования (22.17) в выражение (22.14) приводит к выводу, что условие (22.6) выполнено, и у системы есть первый интеграл (22.16):

$$w = H = T + \Pi. \quad (22.18)$$

Преобразование (22.17) определяет по теореме 22.1 первый интеграл (22.18) — полную механическую энергию — для любой консервативной системы.

2. Сдвиг по координате x

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t, & \hat{x}_i &= x_i + \tau, & \hat{y}_i &= y_i, & \hat{z}_i &= z_i; \\ \xi &= 0, & \eta_i^x &= 1, & \eta_i^y &= 0, & \eta_i^z &= 0. \end{aligned}$$

Так как общий для всех точек сдвиг по одной из координат не меняет расстояний между точками — в (22.15) $\hat{r}_{ik} = r_{ik}$, — условие (22.6) выполнено, и у системы есть первый интеграл (22.16)

$$w = P_x = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i$$

— проекция импульса системы на ось x . Аналогичные построения приводят к выводу, что проекции импульса на другие оси также сохраняются, т. е. во время движения импульс \mathbf{P} системы остается неизменным.

3. Поворот вокруг оси z

$$\begin{aligned} \hat{t} = t, \quad \hat{x}_i = x_i \cos \tau - y_i \sin \tau, \quad \hat{y}_i = x_i \sin \tau + y_i \cos \tau, \quad \hat{z}_i = z_i; \\ \xi = 0, \quad \eta_i^x = -y_i, \quad \eta_i^y = x_i, \quad \eta_i^z = 0. \end{aligned} \quad (22.19)$$

Ортогональные преобразования группы (22.19) не изменяют суммы квадратов, поэтому кинетическая энергия в (22.14) не зависит от параметра τ . Преобразования поворота (22.19) не изменяют также расстояния между точками системы: в (22.14) и (22.15) $\hat{r}_{ik} = r_{ik}$. Таким образом, условие (22.6) вариационной симметрии выполнено, что приводит к первому интегралу (22.16)

$$w = K_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

— проекции момента импульса на ось z . Аналогичные построения приводят к выводу, что сохраняются проекции K_x , K_y и сам вектор \mathbf{K}_0 момента импульса относительно начала координат.

§ 23. Характер экстремума действия по Гамильтону

Принцип Гамильтона утверждает, что при любом варьировании с закрепленными конечными точками на прямом пути выполняется

$$\left. \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

т. е. $\alpha = 0$ есть стационарная точка функции $W(\alpha)$. Тип стационарной точки зависит от наличия или отсутствия на исследуемом пути **кинетических фокусов**.

Для линейных систем уравнений Лагранжа

$$A(t)\ddot{q} + B(t)\dot{q} + C(t)q = f(t), \quad q \in R^n \quad (23.1)$$

фокусы определяют не только характер экстремума действия по Гамильтона, но и влияют на единственность решения краевой задачи: поиск решения $q(t)$, проходящего через две точки (t_0, q^0) , (t_1, q^1) расширенного координатного пространства. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение линейной системы в нормальном виде

$$\dot{x} = D(t)x + f(t), \quad x \in R^m$$

имеет следующий вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + F(t, t_0),$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица однородной системы $\dot{x} = D(t)x$, $F(t, t_0)$ — функция, определяемая $f(t)$ и $\Phi(t, t_0)$, $x_0 = x(t_0)$ — начальные условия. Так как уравнения Лагранжа представимы в нормальном виде, то общее решение системы (23.1) также линейно выражается через начальные данные $q^0 = q(t_0)$, $\dot{q}^0 = \dot{q}(t_0)$:

$$q(t, t_0, q^0, \dot{q}^0) = \Phi_1(t, t_0)q^0 + \Phi_2(t, t_0)\dot{q}^0 + F(t, t_0). \quad (23.2)$$

Рассмотрим конкретный прямой путь в расширенном координатном пространстве, соответствующий начальным данным t_0, q^0, \dot{q}^0 . Так как при $t = t_0$ выполняется $q(t_0, t_0, q^0, \dot{q}^0) = q^0$, то для матриц Φ_1, Φ_2 справедливо

$$\Phi_1(t_0, t_0) = E, \quad \Phi_2(t_0, t_0) = 0. \quad (23.3)$$

При $t_1 > t_0$ возможны два варианта.

Первый:

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_1, t_0, q^0, \dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0} \right\| = \det \Phi_2(t_1, t_0) \neq 0.$$

В этом случае краевая задача $(t_0, q^0), (t_1, q^1 = q(t_1, t_0, q^0, \dot{q}^0))$ имеет единственное решение: из уравнения (23.2), в которое вместо t, q подставлено t_1, q^1 , однозначно вычисляется \dot{q}_0 , т. е. через две точки $(t_0, q^0), (t_1, q^1)$ пространства R^{n+1} проходит единственное решение $q(t)$.

Второй:

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_f, t_0, q^0, \dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0} \right\| = \det \Phi_2(t_f, t_0) = 0. \quad (23.4)$$

Равенство (23.4) приводит к определению фокусов, справедливому как для линейных, так и для нелинейных систем.

Определение 23.1. Две точки (t_0, q^0) , (t_f, q^f) расширенного координатного пространства R^{n+1} , расположенные на решении

$$q(t) = q(t, t_0, q^0, \dot{q}^0)$$

называются **сопряженными кинетическими фокусами**, если справедливо равенство

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_f, t_0, q^0, \dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0} \right\| = 0, \quad (23.5)$$

совпадающее для линейных систем (23.1) с равенством

$$\det \Phi_2(t_f, t_0) = 0 \quad (23.6)$$

для матрицы Φ_2 в общем решении (23.2) (см. (23.4)).

В ситуации фокусов для линейной системы вследствие (23.6) существует нетривиальное решение $z \neq 0$ системы

$$\Phi_2(t_f, t_0)z = 0. \quad (23.7)$$

Решение z порождает семейство $q(t, \alpha)$ разных прямых путей

$$q(t, t_0, q^0, \dot{q}^0 + \alpha z) = \Phi_1(t, t_0)q^0 + \Phi_2(t, t_0)(\dot{q}^0 + \alpha z) + F(t), \quad (23.8)$$

при любом числе α решающих краевую задачу (t_0, q^0) , (t_f, q^f) : влияние αz на границах исчезает вследствие (23.3) и (23.7). Обратно, если по крайней мере два разных прямых пути $(\dot{q}^0 \neq \tilde{\dot{q}}^0)$ решают краевую задачу (t_0, q^0) , (t_f, q^f) , то разность двух уравнений (23.2) для этих путей, при $t = t_f$ приводит к выводу, что система (23.7) имеет нетривиальное решение $z = \dot{q}^0 - \tilde{\dot{q}}^0 \neq 0$, следовательно, для матрицы $\Phi_2(t_f, t_0)$ выполнено условие (23.6), а краевую задачу решает семейство (23.8) разных прямых путей.

Проведенные рассуждения дают возможность считать, что доказана

Теорема 23.1. *Для линейной системы следующие утверждения эквивалентны:*

1. две точки $(t_0, q^0), (t_f, q^f)$, в соответствии с определением 23.1 — сопряженные кинетические фокусы;
2. по крайней мере два разных решения (23.2) уравнений Лагранжа (23.1) проходят через точки $(t_0, q^0), (t_f, q^f)$;
3. через точки $(t_0, q^0), (t_f, q^f)$, проходит однопараметрическое семейство $q(t, \alpha)$ различных решений уравнений Лагранжа.

Для нелинейных уравнений Лагранжа нет прямой связи между фокусами по определению 23.1 и единственностью решения краевой задачи (см. пример 23.2), но, как указывалось в начале параграфа, и в линейном и в нелинейном случаях наличие или отсутствие фокусов определяет тип стационарной точки действия по Гамильтону. Приведем без доказательств две теоремы¹, утверждения которых будут проиллюстрированы (с элементами доказательств в общем случае) на двух примерах.

Теорема 23.2 (необходимое условие минимума). *Если действие по Гамильтону (21.1) при любом варьировании прямого пути с закрепленными граничными точками $(t_0, q^0), (t_1, q^1)$ достигает минимума на прямом пути, то при $t_0 < t < t_1$ отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные точке (t_0, q^0) .*

Следствие. *Если на прямом пути при $t = t_f, t_0 < t_f < t_1$ имеется кинетический фокус, то существует такое варьирование $q(t, \alpha)$ прямого пути с закрепленными граничными точками $(t_0, q^0), (t_1, q^1)$, что действие по Гамильтону принимает на прямом пути стационарное значение, отличное от минимума, включая и нестрогий.*

Теорема 23.3 (достаточное условие строгого минимума). *Если на прямом пути при $t_0 < t \leq t_1$ отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке (t_0, q^0) , то при любом нетривиальном варьировании $q(t, \alpha)$ ($\partial q(t, 0)/\partial \alpha \neq 0$) с закрепленными граничными точками $(t_0, q^0), (t_1, q^1)$ действие по Гамильтону (21.1) принимает на прямом пути строгий минимум.*

¹С доказательствами можно ознакомиться, например, в п.26: Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун.-та, 1980. 288 с.

Пример 23.1. Для линейного осциллятора действие по Гамильтону, уравнение Лагранжа и решение при начальных условиях $t_0 = 0$, x_0 , \dot{x}_0 имеют вид

$$W = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 - x^2) dt, \quad (23.9)$$

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (23.10)$$

$$x(t, x_0, \dot{x}_0) = x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t \quad (23.11)$$

— частота ω учтена в масштабе времени t . Переменная

$$y = \frac{\partial x(t, x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}_0}, \quad (23.12)$$

ответственная за появление кинетического фокуса (см. (23.5)), удовлетворяет уравнению (дифференцируем (23.10) по \dot{x}_0):

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (23.13)$$

с начальными данными

$$y_0 = y(0) = 0, \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0) = 1, \quad (23.14)$$

которые с учетом (23.12) следуют из решения (23.11). Уравнения (23.10) и (23.13) совпадают с точностью до обозначений вследствие того, что уравнение (23.10) является линейным однородным (ср. уравнения (23.28) и (23.31) в примере 23.2). Из уравнения (23.13) с начальными данными (23.14) или из решения (23.11) с учетом (23.12) находится функция $y(t) = \sin t$, которая по условию (23.5) определяет первый кинетический фокус $(\pi, -x_0)$, сопряженный начальной точке $(0, x_0)$: $t_f = \pi$ (половина периода) — первый нуль при $t > 0$ функции $y(t)$.

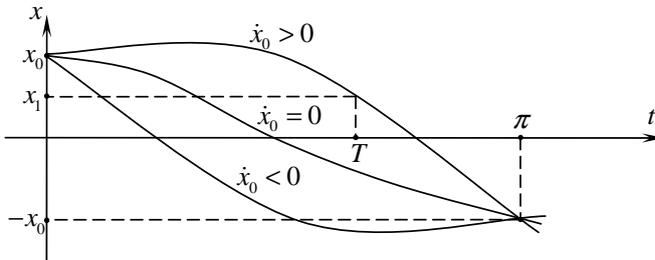


Рис. 23.1

В соответствии с теоремой 23.1 через точки $(\pi, -x_0)$, $(0, x_0)$ проходит однопараметрическое семейство решений (\dot{x}_0 в (23.11) играет роль параметра), причем для любого из прямых путей семейства фокусная ситуация возникает при $t_f = \pi$ — через половину периода (рис. 23.1). Для прояснения, как влияет фокус на характер стационарной точки у действия по Гамильтону, рассмотрим на интервале $[0, T]$ конкретный прямой путь $x(t)$ и проварируем его: включим в семейство $x(t, \alpha)$, для которого справедливо

$$x(0, \alpha) \equiv x_0, \quad x(T, \alpha) \equiv x_1. \quad (23.15)$$

Обозначим

$$u(t) = x'(t, \alpha)|_{\alpha=0} \quad (23.16)$$

(штрих — дифференцирование по α). Вследствие (23.15) справедливы равенства

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0. \quad (23.17)$$

Предполагаем варьирование нетривиальным, т. е. выполняется

$$u(t) \neq 0. \quad (23.18)$$

Для действия (23.9) справедливо соотношение (см.(21.9))

$$W'(\alpha) = - \int_0^T (\ddot{x} + x)x'(t, \alpha) dt. \quad (23.19)$$

Для второй производной с учетом того, что $x(t, 0)$ удовлетворяет (23.10), получим

$$W''(0) = - \int_0^T (\ddot{u} + u)u dt. \quad (23.20)$$

С учетом (23.17) сделаем преобразование

$$\int_0^T \ddot{u}u dt = \dot{u}u|_0^T - \int_0^T \dot{u}^2 dt = - \int_0^T \dot{u}^2 dt,$$

получим формулу

$$W''(0) = \int_0^T (\dot{u}^2 - u^2) dt.$$

При $T \leq \pi$ добавим к $W''(0)$ нулевое вследствие (23.17) слагаемое

$$- \int_0^T \frac{d}{dt} (u^2 \operatorname{ctg} t) dt.$$

Подынтегральное выражение в пределах интегрирования определено:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) \operatorname{ctg} t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t)}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{u}(t) \cos^2 t = \dot{u}(0) < \infty.$$

Использовано (23.17) и правило Лопиталя. Аналогично:

$$\lim_{t \rightarrow \pi} u(t) \operatorname{ctg} t = \dot{u}(\pi) < \infty.$$

Очевидные преобразования приводят к результату

$$W''(0) = \int_0^T (\dot{u} - u \operatorname{ctg} t)^2 dt. \quad (23.21)$$

т. е., если $T \leq \pi$ (при $0 < t < T$ нет фокусов, сопряженных начальной точке $(0, x_0)$), то выполняется $W''(0) \geq 0$.

Рассмотрим отдельно два случая, соответствующие $T \leq \pi$.

I. $T < t_f = \pi$ — при $t \in (0, T]$ фокус отсутствует. Предположение $W''(0) = 0$ приводит к уравнению $\dot{u} = u \operatorname{ctg} t$ с общим решением

$$u = C \sin t.$$

Вариант $C = 0$ противоречит (23.18), вариант $C \neq 0$ с учетом $0 < T < \pi$ противоречит (23.17). Следовательно, при любом (с учетом (23.15)) нетривиальном варьировании (см. (23.18)) выполняется $W''(0) > 0$: действие по Гамильтону на прямом пути принимает строгий минимум.

II. $T = t_f = \pi$. В этом случае варьирование $x(t, \alpha)$ прямого пути, приводящее к $u = x'(t, \alpha)|_{\alpha=0} = C \sin t$, $C \neq 0$ и к равенству $W''(0) = 0$, возможно. Разложение $x(t, \alpha)$ по α имеет следующий вид:

$$x(t, \alpha) = x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t + \alpha C \sin t + \alpha^k f(t). \quad (23.22)$$

Оставлено ближайшее к $\alpha C \sin t$ слагаемое (если оно есть) $\alpha^k f(t)$, $k \geq 2$, определяющее характер экстремума действия $W(\alpha)$. Так как у представителей семейства (23.22) совпадают граничные условия, для функции $f(t)$ должно выполняться

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0. \quad (23.23)$$

Предполагаем также, что выполняется

$$f(t) \neq a \sin t, \quad a \neq 0, \quad (23.24)$$

иначе преобразованием параметра $\beta = \alpha C + \alpha^k a$ слагаемые $\alpha C \sin t$ и $\alpha^k a \sin t$ можно объединить, и место $\alpha^k f(t)$ в формуле (23.22) займет следующее слагаемое в разложении (если оно есть), для которого выполняется (23.24). Подстановка семейства (23.22) в (23.19) приводит к результату

$$W'(\alpha) = -k\alpha^{2k-1} \int_0^T (\ddot{f} + f) f dt$$

с интегралом, совпадающим с интегралом в (23.20), причем граничные условия (23.17) и (23.23) для функций u и f под интегралами также совпадают. Дословное повторение рассуждений, в результате которых осуществлен переход от (23.20) к (23.21), приводит к формуле

$$W'(\alpha) = k\alpha^{2k-1} \int_0^T (\dot{f} - f \operatorname{ctg} t)^2 dt. \quad (23.25)$$

Также как в пункте 1 предположение $W'(\alpha) \equiv 0$ приводит к запрещенному (23.24) равенству $f = a \sin t$ и к выводу

$$W^{(l)} = 0, \quad l = \overline{1, 2k-1}, \quad W^{(2k)} > 0, \quad (23.26)$$

т. е., во-первых, ненулевая производная наименьшего порядка имеет четный порядок, во-вторых, эта производная положительна.

Таким образом, если кинетические фокусы $(0, x_0)$, $(\pi, -x_0)$ есть граничные точки варьируемого прямого пути $x(t)$, то при варьировании $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha \sin t$ (в (23.22) $f(t) \equiv 0$, все представители семейства $x(t, \alpha)$ — прямые пути) действие (23.9) не зависит от α : из (23.25) следует $W'(\alpha) \equiv 0$. При других нетривиальных варьированиях

$x(t, \alpha)$ прямого пути $x(t)$ ($u(t) = x'(t, 0) \neq 0$, $x(t, \alpha) \neq x(t) + \alpha C \sin t$) действие (23.9) достигает на прямом пути строгого минимума: при $u(t) \neq C \sin t$ из (23.21) следует $W''(0) > 0$.

III. В случае

$$T > \pi, \quad (23.27)$$

(на прямом $x(t)$ есть фокус $(\pi, -x_0)$, сопряженный начальной точке $(0, x_0)$), применим варьирование

$$x(t, \alpha) = x(t) + \alpha \sin \frac{n\pi t}{T},$$

где n - натуральное число. Подстановка в (23.20) выражения

$$u(t) = x'(t, 0) = \sin \frac{n\pi t}{T}$$

приводит к результату

$$W''(0) = \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - 1 \right] \frac{T}{2},$$

из которого видно, что при $n = 1$ вследствие (23.27) выполняется

$$W''(0) < 0,$$

т. е. на прямом пути достигается максимум функции $W(\alpha)$. Если же число n выбрать из условия $n\pi > T$, то выполняется $W''(0) > 0$, т. е. на прямом пути функция $W(\alpha)$ принимает минимум.

Подведем итог полученным результатам. Прямой путь, соответствующий начальным данным $t_0 = 0$, x_0 , \dot{x}_0 , содержит в пространстве $R^2(t, x)$ ближайший к начальной точке $(0, x_0)$ кинетический фокус $(\pi, -x_0)$. Если на интервале $[0, T]$ фокус отсутствует ($T < \pi$), то при любом нетривиальном варьировании (граничные точки не варьируются) действие по Гамильтону (23.9) принимает на прямом пути строгий минимум, что соответствует утверждению теоремы 23.3. Если фокусы расположены на границах интервала $[0, T = \pi]$, то существует варьирование $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha \sin t$ прямого пути $x(t)$, для которого выполняется $W(\alpha) \equiv 0$ (проверяется подстановкой в (23.9)); при прочих варьированиях прямому пути соответствует строгий минимум. Если фокус расположен внутри интервала $[0, T]$ ($T > \pi$),

то в зависимости от варьирования действие (23.9) принимает на прямом пути как минимальное, так и максимальное значения.

Пример 23.2. Изучается уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad (23.28)$$

определяющее поведение маятника под действие силы тяжести — коэффициент перед синусом учтен в масштабе времени. Рассматриваются решения $x(t, \omega)$ уравнения (23.28) при начальных данных

$$t_0 = 0, \quad x(0, \omega) = x_0 = 0, \quad \dot{x}(0, \omega) = \dot{x}_0 = \omega \quad (23.29)$$

— маятнику в нижнем положении сообщается угловая скорость ω . При $|\omega| < 2$ движения маятника носят колебательный характер — на рис. 23.2 приведены решения, соответствующие а) $\omega = 0.8$, б) $\omega = 1.4$, в) $\omega = 1.8$.

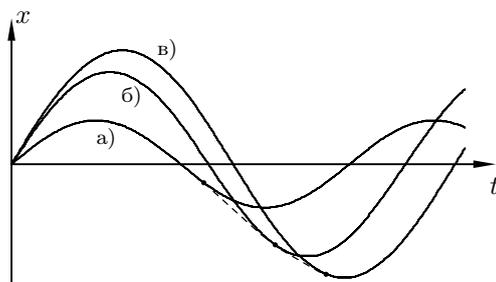


Рис. 23.2

При $|\omega| = 2$ — асимптотический переход из нижнего положения в верхнее. При $|\omega| > 2$ — монотонное возрастание координаты¹. Условие (23.5) для сопряженного кинетического фокуса в данном случае имеет вид

$$\left. \frac{\partial x(t_f, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega^*} = 0. \quad (23.30)$$

Для конструктивного нахождения фокуса на конкретном решении $x(t, \omega^*)$ подставим общее решение $x(t, \omega)$ в уравнение (23.28), в результате дифференцирования по ω получим

$$\ddot{y} + y \cos x(t, \omega) = 0, \quad (23.31)$$

¹С. 152: Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

где обозначено

$$y = \frac{\partial x(t, \omega)}{\partial \omega}.$$

Для y полагаются начальные условия

$$y(0) = y_0 = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \neq 0. \quad (23.32)$$

Первое — $y_0 = 0$ — следствие (23.29): $y_0 = \partial x(0, \omega) / \partial \omega = 0$; второе — $\dot{y}_0 \neq 0$ — принимается во избежание неинформативного тривиального решения $y(t) \equiv 0$. Фокусному условию (23.30) соответствует момент времени $t_f > 0$, для которого выполняется $y_f = y(t_f) = 0$. Таким образом, для нахождения на конкретном решении $x(t)$ кинетического фокуса в смысле определения 23.1 требуется совместно решать уравнения (23.28), (23.31) при начальных условиях (23.29), (23.32). Первому фокусу на решении $x(t)$ соответствует первый момент времени $t_f > 0$, для которого выполняется $y(t_f) = 0$.

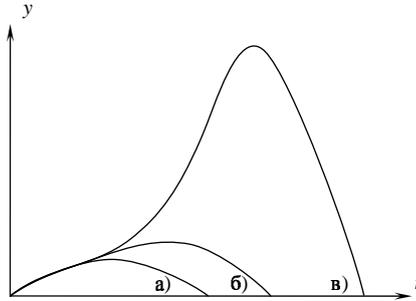


Рис. 23.3

Нетрудно видеть, что вследствие линейности по y уравнения (23.31) и начального условия $y_0 = 0$, неопределенность в начальном условии $\dot{y}_0 \neq 0$ на результат вычисления фокуса не влияет (обычно принимают $\dot{y}_0 = 1$). На рис. 23.3 приведены результаты интегрирования $y(t)$, соответствующие решениям на рис. 23.2 и $\dot{y}_0 = 1$: а) $t_f = 3.54 = 0.54T_p$, б) $t_f = 4.71 = 0.64T_p$, в) $t_f = 6.33 = 0.69T_p$; T_p — период соответствующего решения. Звездочками на рис. 23.2 отмечены положения кинетических фокусов, сопряженных на решениях а), б), в) начальному положению $x_0 = 0$. В отличие от линейного осциллятора у нелинейного — фокус появляется не через половину периода, а в промежутке между половиной и тремя четвертями периода. Еще одно отличие: в фокус в нелинейном случае

приходит единственное решение (при сравнении с близкими). Есть «далекие» другие решения, но этот факт не отличает положение фокуса от прочих положений: на рис. 23.4 показано решение б), другие решения соответствуют г) $\omega \cong -1.86$, д) $\omega \cong -1.924$, е) $\omega \cong -1.96$. В соответствии с теорией¹ геометрическое место фокусов для разных решений $x(t)$ есть огибающая пучка решений $x(t, \omega)$ (на рис. 23.2 огибающая показана пунктиром).

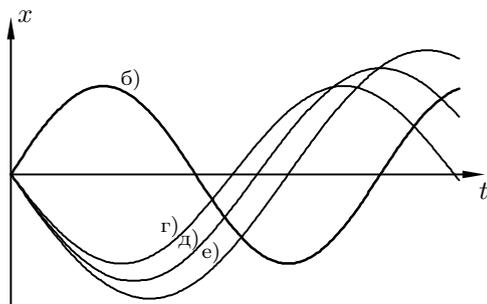


Рис. 23.4

Рассмотрим влияние фокусов на тип экстремума действия по Гамильтону. Уравнение (23.26) есть уравнение Лагранжа для действия по Гамильтону

$$W = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \cos x \right) dt. \quad (23.33)$$

Пусть $x(t)$, $x(0) = 0$, $x(T) = x_1$ — одно из решений уравнения (23.28). Решение варьируется, т. е. включается в нетривиальное семейство $x(t, \alpha)$ ($x(t, \alpha) \neq x(t)$), для которого справедливо

$$x(t, 0) = x(t), \quad x(0, \alpha) = 0, \quad x(T, \alpha) = x_1. \quad (23.34)$$

Семейство $x(t, \alpha)$ подставляется в функционал (23.33), результат подстановки дифференцируется по α (штрих далее — производная по α), после интегрирования с учетом (23.34) по частям приходим к формуле

$$W'(\alpha) = - \int_0^T (\ddot{x} + \sin x) x' dt, \quad (23.35)$$

¹Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.

которая, в частности, для уравнения (23.28) доказывает принцип Гамильтона: при любом варьировании прямого пути выполняется $W'(0) = 0$. Введем обозначение

$$u(t) = \left. \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (23.36)$$

Для $u(t)$ вследствие (23.34) справедливы граничные условия

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0. \quad (23.37)$$

Считаем функцию $u(t)$ достаточно гладкой и для нетривиальности семейства $x(t, \alpha)$ предполагаем

$$u(t) \neq 0. \quad (23.38)$$

С учетом (23.28), (23.35), (23.36) вычисляем значение второй производной $W''(\alpha)$ при $\alpha = 0$:

$$W''(0) = - \int_0^T (\ddot{u} + u \cos x) u dt, \quad (23.39)$$

Интегрируя при условии (23.37) по частям, приходим к эквивалентной формуле

$$W''(0) = \int_0^T (\dot{u}^2 - u \cos x) dt. \quad (23.40)$$

Возможны три случая.

I. При $0 < t \leq T$ кинетический фокус отсутствует.

Рассмотрим решение $y(t)$ уравнения (23.31) с начальными данными (23.32) и функцию $u(t)$ (см. (23.36), (23.37)). По правилу Лопитала раскроем с учетом (23.32) неопределенность

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t)}{y(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{u}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{\dot{u}(0)}{\dot{y}(0)} < \infty, \quad (23.41)$$

т. е. функция $u(t)/y(t)$ определена на всем интервале $0 \leq t \leq T$. В следующем преобразовании использованы граничные условия (23.37)

и уравнение (23.31)

$$0 = \frac{u^2 \dot{y}}{y} \Big|_0^T = \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 \dot{y}}{y} \right) dt = \int_0^T \left(\frac{2u\dot{u}\dot{y}}{y} - u^2 \cos x - \frac{u^2 \dot{y}^2}{y^2} \right) dt. \quad (23.42)$$

Разность выражений (23.40) и (23.42), приводит к результату

$$W''(0) = \int_0^T \left(\dot{u} - \frac{u\dot{y}}{y} \right)^2 dt, \quad (23.43)$$

который показывает, что при любом варьировании выполняется

$$W''(0) \geq 0.$$

Случай $W''(0) = 0$ исключает цепь утверждений (учитывается (23.38)):

$$\begin{aligned} \{W''(0) = 0\} &\Rightarrow \left\{ \dot{u} - \frac{u\dot{y}}{y} = 0 \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{y(t) = Cu(t), C = \text{const}\} \Rightarrow \{y(T) = Cu(T) = 0\}, \end{aligned}$$

что противоречит отсутствию фокуса при $t = T$. Таким образом при любом нетривиальном варьировании $x(t, \alpha)$ действие по Гамильтону (23.33) принимает на решении $x(t)$ уравнения (23.28) строгий минимум.

II. Фокус — конечная точка решения $x(t): t_f = T, y(T) = 0$.

В данном случае функция $u(t)/y(t)$ также определена на интервале $0 \leq t \leq T$ (при $t \rightarrow T$ результат аналогичен (23.41)), поэтому формула (23.43) справедлива. Отличие заключается в том, что существуют варьирования, при которых выполняется $y(t) = Cu(t)$, $C = \text{const}$, например, $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha y(t)$, что приводит к результату $W''(0) = 0$. Дальнейшие вычисления в случае $y(t) = Cu(t)$ определяют третью производную

$$C^3 W'''(0) = \int_0^T y^3 \sin x dt.$$

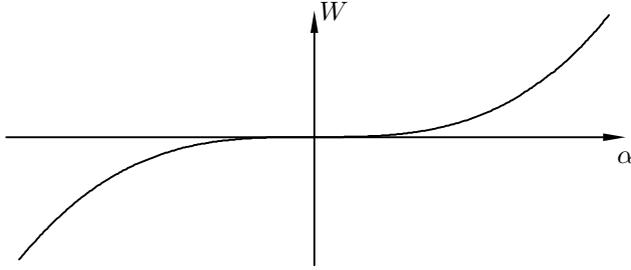


Рис. 23.5

С учетом (23.28), $y(0) = y(T) = 0$ и первого интеграла $\dot{x}\dot{y} + y \sin x = \omega \dot{y}_0$ системы (23.28), (23.31) проведем вычисления

$$\begin{aligned} C^3 W'''(0) &= \int_0^T y^3 \sin x dt = - \int_0^T y^3 \dot{x} dt = - (y^3 \dot{x})|_0^T + 3 \int_0^T y^2 \dot{y} \dot{x} dt = \\ &= 3 \int_0^T y^2 (\omega \dot{y}_0 - y \sin x) dt = 3\omega \dot{y}_0 \int_0^T y^2 dt - 3C^3 W'''(0), \end{aligned}$$

из которых следует

$$W'''(0) = \frac{3\omega \dot{y}_0}{4C^3} \int_0^T y^2 dt,$$

т. е. при нетривиальном варьировании $u(t) = y(t)/C$ ($0 < C < \infty$) нетривиального решения $x(t)$ ($\omega \neq 0$) точка $\alpha = 0$ является для функции $W(\alpha)$ точкой перегиба. На рис. 23.5 приведен график функции $W(\alpha)$, соответствующий постоянным: $\omega = 1.4$, $\dot{y}_0 = 1$, $C = 1$. Для тривиального решения $x(t) \equiv 0$ и для третьей производной при варьировании $y(t) = Cu(t)$ выполняется $W'''(0) = 0$. Подсчет следующей производной приводит к результату

$$W^{(IV)}(0) = \int_0^T u^4 dt = \int_0^T \sin^4 t dt = \frac{3C^4 \pi}{8} > 0$$

(в данном случае $u(t) = \sin t$, $t_f = T = \pi$), т. е. и при варьировании, для которого выполняется $y(t) = Cu(t)$, $C \neq 0$, действие $W(\alpha)$ принимает строгий минимум на прямом пути $x(t) \equiv 0$.

Таким образом, в случае, когда фокусы на границах и только на границах прямого пути, при варьировании $u(t) = y(t)/C$ ($0 < C < \infty$) нетривиального решения $x(t) \neq 0$ стационарность действия по Гамильтону соответствует точке перегиба. В прочих случаях ($u(t) = y(t)/C$, $0 < C < \infty$ для решения $x(t) \equiv 0$ или $u(t) \neq y(t)/C$ для любого решения) — строгому минимуму (см. (23.43)).

III. Для фокуса выполнено: $0 < t_f < T$.

Приведём два варианта варьирования: в первом случае функционал (23.33) принимает на решении строгий минимум; во втором — строгий максимум. Потребуется минимальные сведения из теории Штурма-Лиувилля¹. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (23.28) с начальными данными (23.29). Оператор l определим формулой

$$lu = -(\ddot{u} + u \cos x(t)). \quad (23.44)$$

В частности, уравнение (23.41) эквивалентно равенству $ly = 0$. Рассмотрим для оператора l задачу на собственные функции

$$lu = -(\ddot{u} + u \cos x(t)) = \lambda u, \quad u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \quad (23.45)$$

и на основе ее нетривиального решения λ , $u(t) \neq 0$ организуем варьирование решения $x(t)$ уравнения (23.28): $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha u(t)$. Равенство (23.39) с учетом (23.45) примет вид

$$W''(0) = \lambda \int_0^T u^2(t) dt, \quad (23.46)$$

т. е. характер экстремума у функции $W(\alpha)$ определяется знаком собственного числа λ . Для данного оператора (23.44) справедливы следующие два результата.

¹Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.

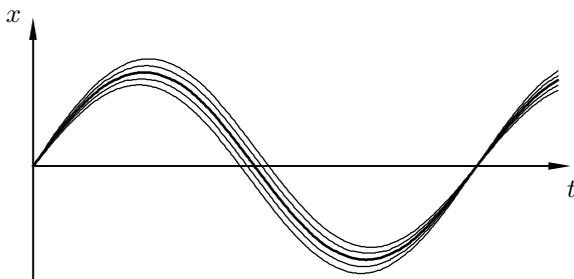


Рис. 23.6

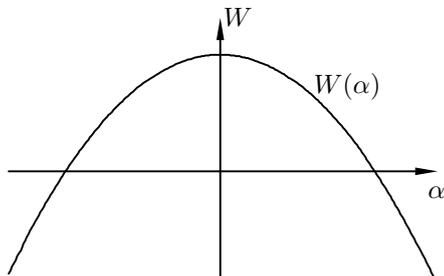


Рис. 23.7

1. Задача (23.45) имеет счетное количество решений

$$\lambda_k, u_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

причем выполняется¹, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ т. е. существует положительное собственное число $\lambda_k > 0$, а варьирование $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha u_k(t)$ с использованием соответствующей собственной функции $u_k(t)$ определит вследствие (23.46) строгий минимум функции $W(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

2. Вследствие того, что решение $y(t)$ задачи $ly = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) \neq 0$, совпадающей с (23.31), (23.32), имеет корень $y(t_f)$ при $t_f < T$, выполняется², $\lambda_1 < 0$ а варьирование $x(t, \alpha) = x(t) + \alpha u_1(t)$ с использованием собственной функции $u_1(t)$ определит строгий максимум функции $W(\alpha)$ при $\alpha = 0$ (см. (23.46)). Вычисления для

¹Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с., теорема на стр. 135.

²Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с., теорема на стр. 151.

решений на рис. 23.2 привели к результатам: а) $\lambda_1 = -0.610$; б) $\lambda_1 = -0.342$; в) $\lambda_1 = -0.111$. В каждом случае T — период решения. На рис. 23.6 приведен результат варьирования для решения б): $\alpha = 0$; $\alpha = \pm 0.1$; $\alpha = \pm 0.2$. На рис. 23.7 приведен для решения б) график функции $W(\alpha)$.

§ 24. Интегральные инварианты. Принцип Мопертюи–Лагранжа

Для гамильтоновых систем, кроме законов сохранения — первых интегралов — имеют место законы сохранения особого вида: интегральные инварианты. Потребуется понятие **трубки прямых путей**.

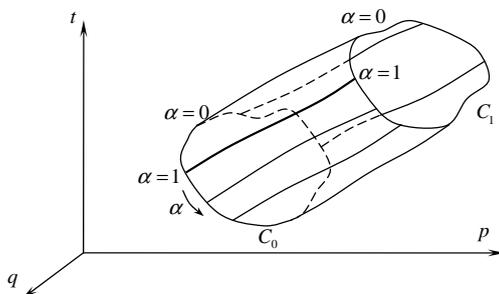


Рис. 24.1

В $(2n + 1)$ — мерном расширенном фазовом пространстве переменных (t, q, p) рассматривается контур $C_0 : t^0(\alpha), q^0(\alpha), p^0(\alpha)$. Предполагается $0 \leq \alpha \leq 1$ и (рис. 24.1)

$$t^0(0) = t^0(1), \quad q^0(0) = q^0(1), \quad p^0(0) = p^0(1). \quad (24.1)$$

Каждая точка t^0, q^0, p^0 контура C_0 есть полный набор начальных данных для уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (24.2)$$

и определяет единственное решение — прямой путь. Совокупность прямых путей $q(t, \alpha), p(t, \alpha)$, проходящих через точки контура C_0 , носит название **трубки прямых путей** (рис 24.1). Зададим еще один

контур $C_1 : t^1(\alpha), q^1(\alpha), p^1(\alpha)$, охватывающий трубку. Параметры α , параметризующие контуры C_0, C_1 , считаем **согласованными**: при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0, C_1 расположены на одном том же прямом пути. Трубка прямых путей и контуры C_0, C_1 определяют действие по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int_{t^0(\alpha)}^{t^1(\alpha)} L(t, q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)) dt$$

как функцию α . Вследствие (24.1) справедливо равенство

$$W(0) = W(1). \quad (24.3)$$

Для семейства прямых путей формула вариации действия по Гамильтону (21.3) имеет вид

$$\delta W(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_{C_1} - \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right]_{C_0}$$

— на прямых путях интеграл в (21.3) обращается в нуль. Проинтегрируем полученное выражение по α в пределах от 0 до 1. В результате в левой части получим (см. (24.3))

$$\int_0^1 \delta W(\alpha) = W(1) - W(0) = 0,$$

вследствие чего интегрирование правой части приводит к равенству

$$\oint_{C_1} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t = \oint_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t. \quad (24.4)$$

Интегральное выражение

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \quad (24.5)$$

носит название: основной относительный **интегральный инвариант Пуанкаре-Картана**. Равенство (24.4) раскрывает смысл инвариантности: по любым двум согласованным контурам C_0 и C_1 ,

охватывающим трубку прямых путей, порожденных функцией H , входящей в $J_{\text{ПК}}$, интеграл $J_{\text{ПК}}$, принимает одно и то же значение. Термин «относительный» означает, что инвариантность в описанном смысле имеет место, когда интегрирование в $J_{\text{ПК}}$, проводится по замкнутому контуру.

Если контуры есть сечение трубки плоскостями $t = \text{const}$ (изохронные контуры, рис. 24.2), то инвариант (24.5) примет вид

$$J_{\Pi} = \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \quad (24.6)$$

универсального **интегрального инварианта Пуанкаре**. Универсальность означает инвариантность для любой гамильтоновой системы.

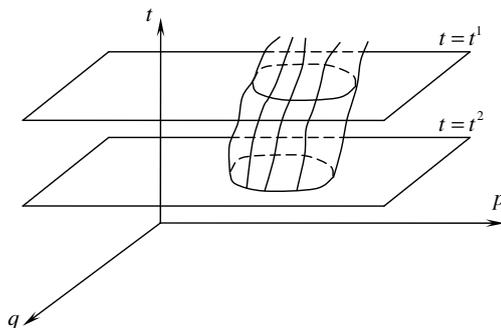


Рис. 24.2

Изохронные контуры далее будем обозначать \bar{C} .

Инвариантность интегралов J_{Π} , $J_{\text{ПК}}$ является принципом механики: может быть принята за основную аксиому динамики. Теоремы, обосновывающие эту мысль, носят название **обратных теорем теории интегральных инвариантов**.

Теорема 24.1. Пусть трубка прямых путей образована решениями некоторой системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(t, q, p), \\ \dot{p}_i &= P_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Пусть на изохронных контурах имеет место инвариантность интеграла Пуанкаре (24.6). Тогда система (24.7) гамильтонова, т. е.

$$\exists H(t, q, p) : Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

□ Произвольный контур \bar{C} есть результат переноса решениями $q(t, \alpha)$, $p(t, \alpha)$ системы (24.7) точек контура начальных состояний \bar{C}_0 (рис. 24.2). Это обстоятельство позволяет свести интегрирование по контуру \bar{C} к интегрированию по контуру \bar{C}_0 .

$$\begin{aligned} J_{\Pi}(t) &= \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n p_i(t, \alpha) \delta q_i(t, \alpha) = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n p_i(t, \alpha) \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

По условию теоремы $J_{\Pi}(t) = \text{const}$, что влечет за собой равенство

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{\Pi}}{dt} &= \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \\ &= \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i + p_i \delta Q_i) = \\ &= \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) + \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n \delta(p_i Q_i) = \\ &= \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) = 0. \end{aligned}$$

Так как \bar{C}_0 — произвольный контур, из полученного результата сле-

дует утверждение теоремы.

$$\begin{aligned} \exists H(t,p,q) : \sum_{i=1}^n (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) &= -\delta H(t,p,q) = \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right), \\ Q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

(δH — изохронный дифференциал: при фиксированном t). ■

Теорема 24.2. Пусть трубка прямых путей образована решениями системы (24.7). Пусть по любым двум согласованным контурам C_0 и C_1 , охватывающим трубку прямых путей, интеграл типа Пуанкаре-Картана

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \Phi(t,q,p) \delta t \quad (24.8)$$

принимает одно и то же значение. Тогда справедливы соотношения

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}. \quad (24.9)$$

□ Из инвариантности (24.8) следует, что на изохронных контурах \bar{C} инвариантен интеграл Пуанкаре $J_{\text{П}}$, откуда по теореме 24.1 следует, что система (24.7) гамильтонова с некоторой функцией Гамильтона H . Таким образом, для системы (24.7) инвариантны два интеграла типа $J_{\text{ПК}}$: с функциями Φ и H . Так как на изохронных контурах \bar{C} они совпадают, то они равны и на произвольных контурах C .

$$\oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \Phi \delta t = \oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t = \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i,$$

откуда следует равенство

$$\oint_C (H - \Phi) \delta t = 0.$$

Контур C произволен, поэтому с некоторой функцией $G(t, q, p)$ справедливо соотношение

$$(H - \Phi)dt = dG(t, q, p) = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i \right),$$

из которого следует

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial p_i} = 0,$$

$$H = \Phi + \frac{dG(t)}{dt},$$

т. е. система (24.7) — гамильтонова, и ее правые части связаны с функцией Φ в соответствии с утверждением (24.9) теоремы. ■

Инвариант (24.5) содержит компактную информацию о гамильтоновой системе (24.2). Например, если на согласованных контурах, охватывающих трубку прямых путей некоторой системы (24.7), интеграл

$$\oint_C x\delta y + xy\delta z$$

принимает одно и то же значение, то сравнение с (24.5) приводит к следующему распределению ролей: $p = x$, $q = y$, $H = -xy$, $t = z$, и система (24.7), при помощи которой создавалась трубка, имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = -y, \quad \frac{dx}{dz} = x.$$

Теоремы 24.1 и 24.2 помогают разобраться в вопросах замены переменных в уравнениях Гамильтона. В частности, если замена переменных $\{t, q, p\} \rightarrow \{\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p}\}$ в уравнениях (24.2) и в интеграле (24.5) приводит для интеграла к результату

$$\oint_C \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p}) \delta \tilde{t}, \quad (24.10)$$

где K — некоторая функция, то в новых переменных система (24.2) является гамильтоновой и определяется функцией Гамильтона $K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$.

Поставим следующую задачу. Пусть в механической системе, заданной гамильтонианом $H(t, q, p)$, делается неособенный переход к новым координатам и новому «времени»

$$\tilde{q}_i = f_i(t, q), \quad i = \overline{1, n}, \quad (24.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= g(t, q), \\ \det M &\neq 0, \end{aligned} \quad (24.12)$$

где обозначено

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} & \frac{\partial g}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{array} \right\|. \quad (24.13)$$

Какому преобразованию

$$\tilde{p}_i = h_i(t, q, p) \quad (24.14)$$

требуется подвергнуть обобщенные импульсы, чтобы в результате замены переменных (24.11), (24.14) гамильтонова система (24.2) перешла бы опять в гамильтонову? Какова функция Гамильтона $K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$ в новых переменных? Выбор p_i и K подчиним требованию, чтобы вследствие преобразования (24.11), (24.14) подынтегральные выражения в (24.5) и (24.10) были бы равны:

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - K \delta \tilde{t}. \quad (24.15)$$

Раскроем дифференциалы $\delta \tilde{q}_i$, $\delta \tilde{t}$:

$$\delta \tilde{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta t + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

$$\delta \tilde{t} = \frac{\partial g}{\partial t} \delta t + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_k} \delta q_k,$$

подставим в правую часть (24.15), приравняем коэффициенты при дифференциалах δq_k , δt , получим соотношения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \tilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial q_k} K = p_k$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial t} \tilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial t} K = -H,$$
(24.16)

или, используя обозначение (24.13),

$$M \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ -K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -H \end{pmatrix}.$$

Вследствие условия (24.12) эта система решается однозначно относительно $\tilde{p}(t, q, p)$ (см. (24.14)) и $K(t, q, p)$. Для получения окончательного ответа требуется разрешить преобразование (24.11), (24.14) относительно t , q , p и подставить в K . Вообще говоря, возможность получить из (24.11), (24.14) функции $p_i(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$ является дополнительным требованием, не зависящим от (24.12) (ниже рассмотрен пример системы с функцией Гамильтона $H(t, q)$, подвергнутой преобразованию, соответствующему смене ролей времени t и одной из координат q_k).

Применим описанную процедуру для частного случая преобразования (24.11)

$$\tilde{q}_1 = t, \quad \tilde{t} = q_1, \quad \tilde{q}_i = q_i, \quad i \neq 1, \quad \tilde{t} = q_1 \quad (24.17)$$

— время t и координата q_1 меняются ролями. Подстановка в (24.16) приводит к соотношениям

$$\tilde{p}_1 = -H(t, q, p),$$

$$\tilde{p}_i = p_i, \quad i \neq 1,$$

$$K = -p_1.$$
(24.18)

Для нахождения $K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p}) = -p_1(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$ требуется решить относительно p_1 уравнение

$$\tilde{p}_1 = -H(\tilde{q}_1, \tilde{t}, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, p_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n). \quad (24.19)$$

Если переменная p_1 в $H(t, q, p)$ отсутствует, следует поменять ролями t и другую обобщенную координату. «Безнадежный» случай $H(t, q)$ из рассмотрения исключается. В этом случае, как было обращено внимание выше, из уравнений (24.17) и (24.18) нельзя найти зависимость $p_i = p_i(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$, $i = \overline{1, n}$ — уравнение (24.19) не решится относительно p_1 или импульса с другим номером.

Функция Гамильтона $K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$ определит уравнения Гамильтона (24.7), в которых роль независимой переменной t играет координата q_1 .

Для обобщенно-консервативной системы уравнение (24.19) принимает в исходных переменных вид

$$\tilde{p}_1 = -H(q, p) = -h. \quad (24.20)$$

Учет (24.20) и возврат (24.17), (24.18) к исходным обозначениям для переменных приводит к функции

$$K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h),$$

которая совпадает с функцией K (см. (20.7)) из § 20 (ср. способы их получения) и названа в § 20 **функцией Уиттекера**. Соответствующая K гамильтонова система

$$\begin{aligned} q'_i &= \frac{\partial q_i}{\partial q_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = \overline{2, n}, \\ p'_i &= \frac{\partial p_i}{\partial q_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned}$$

для нахождения функций $q_i(q_1)$, $p_i(q_1)$, $i = \overline{2, n}$ совпадает с уравнениями (20.9), которые названы в § 20 **уравнениями Уиттекера**. Уравнения (20.9) были использованы в § 20 для понижения порядка обобщенно-косоервативной системы на две единицы. Уравнения Уиттекера открывают возможность исследования геометрического — траекторного — поведения системы: вне зависимости от t . Помимо уравнений Уиттекера (аналога уравнений Гамильтона), можно определить **уравнения Якоби** (аналог уравнений Лагранжа) с

функцией Якоби (см. (19.14))

$$P = \sum_{k=2}^n p_k q'_k - K,$$

действие по Лагранжу (аналог действия по Гамильтону)

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P dq_1,$$

обосновать **принцип Мопертюи-Лагранжа**: для прямого пути должно выполняться

$$\delta W^* = 0$$

— при варьировании все пути должны удовлетворять (24.20) с одной и той же постоянной h , иметь одинаковые начальные q^0 и конечные точки q^1 .

В заключение параграфа еще раз обратим внимание на аккуратность, с которой нужно подходить к утверждению: «Вычисление интеграла Пуанкаре–Картана по двум контурам, охватывающим трубку прямых путей, приводит к совпадающим результатам.» Утверждение с гарантией справедливо, если контуры согласованы, т. е. возможна такая параметризация контуров общим параметром α , что при каждом значении α соответствующие точки контуров расположены на одном и том же прямом пути. Совместно с студентами 552 группы МФТИ Н.В.Башкирцевым, А.В.Вертячих и А.А.Витушко был организован численный эксперимент, который показывает, что при рассогласовании контуров — каждый прямой путь пересекает один раз первый контур и несколько раз второй — интегрирование приводит к разным числам². Исследование обсуждаемого вопроса «вручную» даже для простых уравнений весьма затруднительно. С применением вычислительной техники для линейного осциллятора с диссипацией проведено построение трубки прямых путей, охватывающих трубку контуров и интегрирование. Уравнению осциллятора

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (24.21)$$

²Яковенко Г.Н., Башкирцев Н.В., Вертячих А.В., Витушко А.А. Численное исследование интегральных инвариантов // Моделирование процессов управления и обработки информации: Межвед. сб. науч. тр./МФТИ. М., 1996. С.176–181.

соответствуют уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{q} &= e^{-2nt}p, \\ \dot{p} &= -e^{2nt}\omega_0^2q,\end{aligned}\tag{24.22}$$

вычисленные по функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} (e^{-2nt}p^2 + \omega_0^2 e^{2nt}q^2).\tag{24.23}$$

Для перехода от (24.22) к (24.21) первое уравнение в (24.22) дифференцируется по t с подстановкой \dot{p} из второго уравнения. Дальнейшее исследование проводится в предположении, что в уравнениях в (24.21) – (24.23) выполняются неравенства $\omega_0 > n > 0$. В этом случае решение уравнений (24.21) и (24.22) имеет вид

$$\begin{aligned}q(t) &= e^{-nt} \left(q_0 \cos \omega t + \frac{p_0 + nq_0}{\omega} \sin \omega t \right), \\ p(t) &= e^{+nt} \left(p_0 \cos \omega t - \frac{np_0 + \omega_0^2 q_0}{\omega} \sin \omega t \right),\end{aligned}\tag{24.24}$$

где обозначено (см. (24.22))

$$p_0 = p(0) = \dot{q}_0 = \dot{q}(0), \quad q_0 = q(0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - n^2.$$

Обратим внимание на обстоятельство, поясняющее вид трубок прямых путей на рисунках: несмотря на диссипацию, функция $|p(t)|$ имеет тенденцию к возрастанию.

В расширенном координатном пространстве R^3 строится контур начальных состояний C_0 ($\alpha = [0, 2\pi)$):

$$t_0 = 0, \quad q_0 = \sin \alpha, \quad p_0 = \cos \alpha\tag{24.25}$$

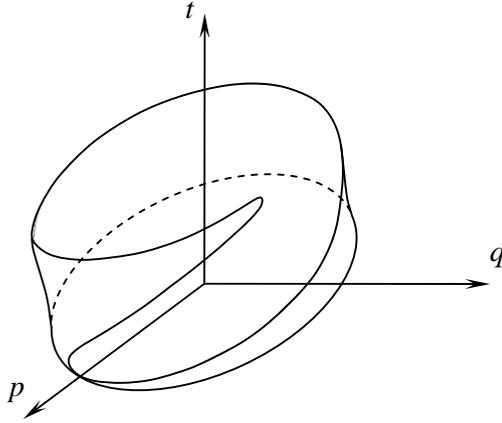


Рис. 24.3. Согласованный контур

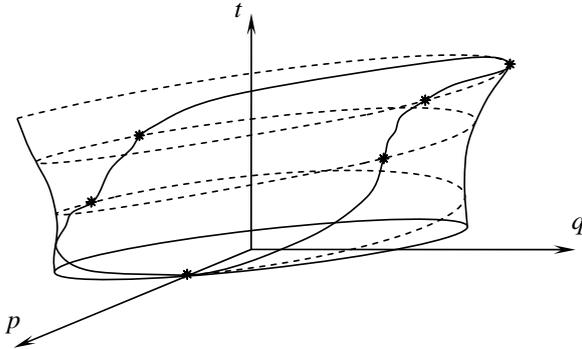


Рис. 24.4. Несогласованный контур

Каждой точке контура (24.25) соответствует единственное решение уравнений Гамильтона (24.23) — прямой путь (один путь изображен на рис. 24.4 пунктиром). Подстановка (24.5) в решение (24.4) определит в пространстве R^3 поверхность $p(t, \alpha)$, $q(t, \alpha)$ — трубку прямых путей (рис. 24.3, рис. 24.4). Построим другой контур C_1 , охватывающий трубку прямых путей и согласованный с контуром C_0 : при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0 и C_1 расположены на одном и том же прямом пути. На рисунке 24.3 согласованный контур есть результат подстановки в решение (24.24) начальных данных (24.25) $p = p(t, \alpha)$, $q = q(t, \alpha)$ и для разных решений разных сдвигов по t вдоль решения: $t = T \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, где $[0, T]$ —

диапазон изменения времени t на контуре C_1 , т. е. контур C_1 параметризуется α следующим образом: $t = T \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $q = q(T \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \alpha)$, $p = p(T \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \alpha)$. Подстановка этих функций в подынтегральное выражение интеграла Пуанкаре-Картана (формула для H приведена в (24.23))

$$J = \oint_C pdq - Hdt \quad (24.26)$$

и численное интегрирование по α в пределах от 0 до 2π приводят к гарантированному теорией результату: $J(T) \equiv \pi$ (контур C_0 соответствует $T = 0$, значения $T \neq 0$ определяют другие контуры C_1 , согласованные с C_0).

Несогласованный с C_0 контур $C_1 = C(T)$ близок к сечению трубки прямых путей плоскостью, проходящей через точку $t = 0$, $q = 0$, $p = 1$ и параллельной оси q . Контур C_1 задается в цилиндрических координатах r , φ , t ($p = r \cos \varphi$, $q = r \sin \varphi$) и параметризуется углом φ ($\varphi \in [0, 2\pi)$) следующим образом. Фиксированному значению φ ставится в соответствие время $t = T \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ($[0, T]$ — диапазон изменения времени t на контуре) и сечение $t = \text{const}$ трубки прямых путей (рис. 24.5).

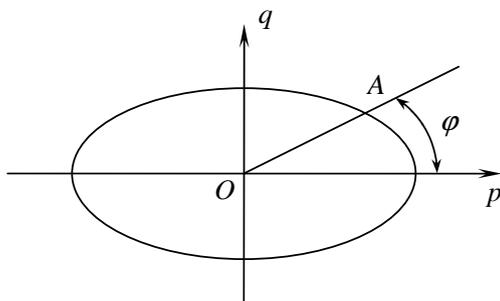


Рис. 24.5. Сечение трубки прямых путей плоскостью $t = \text{const}$.

Уравнения

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{p(\alpha, \varphi)}{\sqrt{p^2(\alpha, \varphi) + q^2(\alpha, \varphi)}}, \\ \sin \varphi &= \frac{q(\alpha, \varphi)}{\sqrt{p^2(\alpha, \varphi) + q^2(\alpha, \varphi)}}, \end{aligned}$$

где $p(\alpha, \varphi)$, $q(\alpha, \varphi)$ — результат подстановки $t = T \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ и (24.25) в (24.24), после численного решения определяют параметр $\alpha(\varphi)$, соответствующий прямому пути, приводящему в точку A сечения на рис. 24.5. По параметру $\alpha(\varphi)$ и значению $t = T \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ из (24.24) определяется точка $t(\varphi)$, $q(\varphi)$, $p(\varphi)$ (или $r(\varphi)$, φ , $t(\varphi)$) на контуре $C_1 = C(T)$. На рис. 24.4 представлен один из результатов построения контура, несогласованного с контуром начальных состояний (24.25). Звездочками на рисунке отмечены пять пересечений прямого пути, соответствующего $\alpha = 0$, с контуром, что подтверждает несогласованность контуров. Результат численного интегрирования — вычисления контурного интеграла (24.26) при разных значениях T — представлен на рис. 24.6.

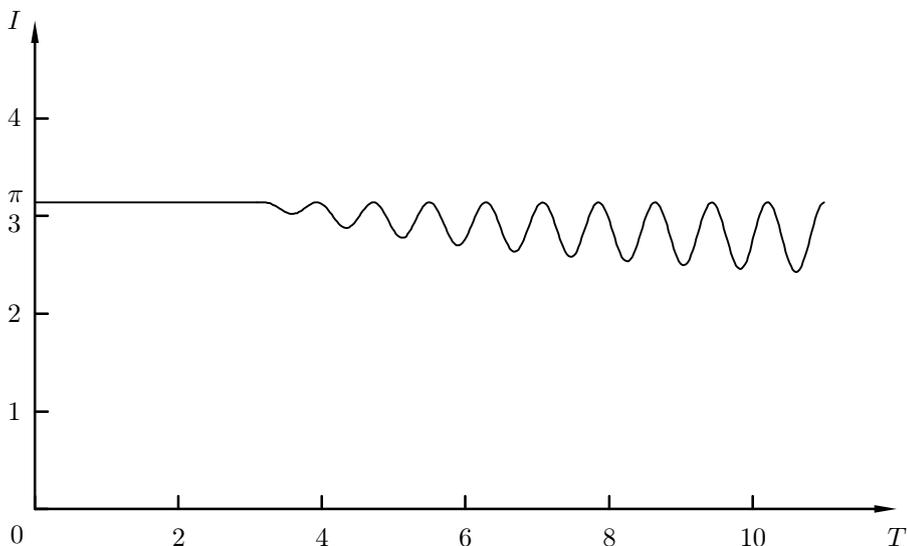


Рис. 24.6. Значения интегрального инварианта на несогласованных контурах

График подтверждает, что вследствие несогласованности контуров интеграл Пуанкаре–Картана на разных контурах, охватывающих трубку прямых путей, принимает разное значение.

§ 25. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема

Кроме универсального интегрального инварианта (24.6) первого

порядка существуют и другие универсальные интегральные инварианты. Например, при помощи формулы Стокса находится инвариант второго порядка

$$J_1 = J_\Pi = \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \iint_S \sum_{i=1}^n \delta p_i \delta q_i = J_2,$$

интегрирование проводится по двумерной поверхности S , краем которой является контур \bar{C} . Поверхность S не замкнута, в таком случае интегральный инвариант называется абсолютным. Аналогично приведенным J_1, J_2 имеются универсальные интегральные инварианты более высоких порядков.

Докажем инвариантность самого «старшего» интеграла

$$J_{2n} = \int_{V(t)} \dots \int \delta p_1 \delta q_1 \dots \delta p_n \delta q_n, \quad (25.1)$$

вычисляющего объем в фазовом пространстве. Инвариантность понимается в следующем смысле: если каждую точку некоторого начального объема V_0 в фазовом пространстве перемещать по траекториям гамильтоновой системы, то величина объема $V(t)$, который займут точки к моменту времени t , не зависит от t (рис. (25.1)). Докажем этот факт для систем более общего по сравнению с уравнениями Гамильтона вида.

Теорема 25.1 (Ж. Лиувиль). Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \varphi_i(t, x), \quad i = \overline{1, m}, \quad (25.2)$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \varphi_i(t, x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial x_i} = 0. \quad (25.3)$$

Тогда на решениях системы сохраняется величина фазового объема.

□ Считаем известным общее решение системы (25.2):

$$x_i = f_i(t, t_0, x_1^0, \dots, x_m^0), \quad i = \overline{1, m}. \quad (25.4)$$

Пусть начальные положения занимают при $t = t_0$ объем V_0 (рис. 25.1), равный по величине

$$v_0 = \int \cdots \int_{V_0} dx_1^0 \dots dx_m^0. \quad (25.5)$$

К моменту времени t величина объема равна

$$v(t) = \int \cdots \int_{V(t)} dx_1 \dots dx_m. \quad (25.6)$$

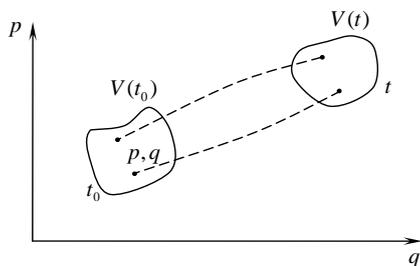


Рис. 25.1

Для того, чтобы области интегрирования в (25.5) и (25.6) совпали, сделаем при помощи (25.4) переход в (25.6) к переменным x_0 :

$$v(t) = \int \cdots \int_{V_0} I(t, x^0) dx_1^0 \dots dx_m^0.$$

Введено обозначение

$$I(t, x^0) = \det \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_0^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_0^m} \end{array} \right\|$$

для якобиана преобразования (25.4). При $t = t_0$ преобразование (25.4) имеет вид $x_i = x_i^0$, поэтому выполняется $I(t_0, x^0) = 1$. Покажем, что в силу (25.3) это значение сохранится и в дальнейшем, т. е. справедливо $I(t, x^0) \equiv 1$. Вычислим dI/dt . По правилу дифференцирования определителей имеем

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^m I_i, \quad (25.7)$$

где I_i есть результат замены в I строки с номером i ее производной по t :

$$I_i = \det \left\| \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \dots & \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \text{ i-я строка.}$$

Так как $f(t, t_0, x_0)$ — решение системы (25.2), справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial x_0^k} = \frac{\partial}{\partial x_0^k} \dot{f}_i = \frac{\partial}{\partial x_0^k} \varphi_i(t, f) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_0^k}.$$

Умножая с учетом этого равенства l -е строки в I_i на $\partial \varphi_i / \partial x_l$ и вычитая из i -й строки, получим:

$$I_i = \det \left\| \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| = I \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Подстановка в (25.7) даст

$$\frac{dI}{dt} = I \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i},$$

что по условию (25.3) теоремы приводит к равенству

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

и к доказываемым в теореме тождествам $I(t) \equiv 1$ и $v(t) \equiv v_0$. ■

Так как для гамильтоновых систем (24.2) условие (25.3) выполнено:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0,$$

то справедлива

Теорема 25.2. *Величина фазового объема не меняется при перемещении точек объема по траекториям гамильтоновой системы (24.2).*

В формулировке следующей теоремы использовано понятие плотности статистического ансамбля. Под статистическим ансамблем понимается множество систем, у которых совпадают уравнения Гамильтона, но различаются начальные данные q_0, p_0 . В начальный момент времени t_0 ансамбль может неравномерно размещаться в фазовом пространстве. Эту неравномерность удобно характеризовать **плотностью статистического ансамбля**

$$\rho(q,p) = \frac{\mu}{v}, \quad (25.8)$$

где v — величина малого объема V , а μ — количество находящихся в V экземпляров ансамбля. Малость объема V понимается в «физическом» смысле: V достаточно мал, чтобы характеризовать точку q, p фазового пространства, но достаточно велик, чтобы плотность ρ была усредненной характеристикой ансамбля. Далее следим за системой «постоянного состава»: экземплярами, находящимися при $t = t_0$ в объеме V . К моменту времени t они займут другое положение, и новая плотность ρ определится новым объемом $V(t)$. Справедлива

Теорема 25.3. *Плотность $\rho(q,p)$ статистического ансамбля является первым интегралом гамильтоновой системы.*

□ Число μ в числителе дроби (25.8) не меняется со временем по определению плотности, объем $v(t)$ в знаменателе — по теореме 25.2.

■

Иногда в литературе теорему 25.3 также называют теоремой Ли-увилля.

§ 26. Теорема Ли Хуачжун о совокупности универсальных интегральных инвариантов первого порядка

В § 25 обсуждался вопрос об универсальных интегральных инвариантах более высокой кратности, чем у интеграла Пуанкаре (24.6). В частности, изучен $2n$ -кратный интегральный инвариант — фазовый объем. В настоящем параграфе приводится результат, который определяет все множество универсальных интегральных инвариантов первого порядка: контурных интегралов

$$J = \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\}, \quad (26.1)$$

принимających одно и тоже значение на разных сечениях \bar{C} (при $t = t_1$) трубки прямых путей, причем трубка порождается произвольным начальным контуром \bar{C}_0 (при $t = t_0$) в расширенном фазовом пространстве и любой гамильтоновой системой. Оказывается, как утверждает следующая теорема, каждый такой инвариант (26.1) очевидным образом связан с интегралом Пуанкаре (24.6).

Теорема 26.1 (Ли Хуачжун¹). *Следующие два утверждения эквивалентны:*

а) интеграл (26.1) аналогично интегралу Пуанкаре (24.6) — универсальный интегральный инвариант;

б) существуют такое число c и функция $F(t, q, p)$, что подынтегральные выражения в (24.6) и (26.1) связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\} = c \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \delta F(t, q, p), \quad (26.2)$$

где $\delta F(t, q, p)$ — изохронный (t — фиксированный параметр) дифференциал.

¹Hwa-Chang Lee. Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations//Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1947. Ser.A, v.LXII., P. 237–246.

□ Доказательство а) \Rightarrow б). Основой доказательства является универсальность инварианта (26.1) — инвариантность для любой гамильтоновой системы. Использование этого факта при различных функциях Гамильтона $H(t, q, p)$ постепенно уточняет подынтегральное выражение в (26.1) и в конце концов приводит к доказываемому равенству (26.2). Ограничимся реализацией этой идеи для случая одной степени свободы: в (26.1) и (26.2) $n=1$. Пусть

$$\begin{aligned} q &= q(t, t_0, q^0, p^0), \\ p &= p(t, t_0, q^0, p^0) \end{aligned} \quad (26.3)$$

— общее решение гамильтоновой системы, соответствующей функции

$H(t, q, p)$, и пусть при $t = t_0$ задан некоторый контур \bar{C}_0 ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\begin{aligned} q^0 &= q^0(\alpha), & q^0(1) &= q^0(0), \\ p^0 &= p^0(\alpha), & p^0(1) &= p^0(0). \end{aligned} \quad (26.4)$$

В совокупности (26.3) и (26.4) определяют трубку прямых путей

$$\begin{aligned} q(t, \alpha) &= q(t, t_0, q^0(\alpha), p^0(\alpha)), \\ p(t, \alpha) &= p(t, t_0, q^0(\alpha), p^0(\alpha)), \end{aligned} \quad (26.5)$$

при фиксированном моменте t — другой контур $\bar{C}(t)$ и значение $J(t)$ инварианта (26.1) на этом контуре. Замена переменных $(q, p) \rightarrow (q^0, p^0)$, определенная решением (26.3), в интеграле (26.1) приводит к интегралу

$$J = \oint_{\bar{C}_0} \{A(t, q, p)\delta q + B(t, q, p)\delta p\}, \quad (26.6)$$

у которого \bar{C}_0 — начальный контур (26.4), а в подынтегральном выражении переменные q, p — функции (26.3) от q^0, p^0 , в частности, $\delta q, \delta p$ понимаются как

$$\begin{aligned} \delta q &= \frac{\partial q(t, t_0, q^0, p^0)}{\partial q_0} \delta q_0 + \frac{\partial q(t, t_0, q^0, p^0)}{\partial p_0} \delta p_0, \\ \delta p &= \frac{\partial p(t, t_0, q^0, p^0)}{\partial q_0} \delta q_0 + \frac{\partial p(t, t_0, q^0, p^0)}{\partial p_0} \delta p_0. \end{aligned} \quad (26.7)$$

Утверждение а) теоремы эквивалентно утверждению: при любом контуре \bar{C}_0 начальных состояний (26.4) и произвольной гамильтоновой системе для интегралов (26.1) и (26.6) выполняется

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0. \quad (26.8)$$

Рассмотрим три варианта выбора функции $H(t, q, p)$. Полагаем далее $t_0 = 0$.

$H = 0$. В (26.3): $q = q^0$, $p = p^0$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$J(t) = \oint_{\bar{C}_0} \{A(t, q^0, p^0) \delta q^0 + B(t, q^0, p^0) \delta p^0\}.$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату

$$\dot{J}(t) = \oint_{\bar{C}_0} \left\{ \frac{\partial A(t, q^0, p^0)}{\partial t} \delta q^0 + \frac{\partial B(t, q^0, p^0)}{\partial t} \delta p^0 \right\} = 0.$$

В силу произвольности контура \bar{C}_0 выражение под интегралом должно быть полным дифференциалом (изохронным) некоторой функции (q^0, p^0 заменяем на q, p)

$$\delta f_1(t, q, p) = \frac{\partial A}{\partial t} \delta q + \frac{\partial B}{\partial t} \delta p,$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Подстановка вместо f_1 ее «первообразной по t »

$$f_1(t, q, p) = \frac{\partial F_1(t, q, p)}{\partial t}$$

приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(A - \frac{\partial F_1}{\partial q} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(B - \frac{\partial F_1}{\partial p} \right) = 0,$$

т. е. существуют такие функции $a(q,p)$ и $b(q,p)$, что справедливо представление

$$\begin{aligned} A(t,q,p) &= a(q,p) + \frac{\partial F_1}{\partial q}, \\ B(t,q,p) &= b(q,p) + \frac{\partial F_1}{\partial p}, \end{aligned}$$

которое определяет вид

$$\begin{aligned} A\delta q + B\delta p &= a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \frac{\partial F_1}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F_1}{\partial p}\delta p = \\ &= a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \delta F_1 \end{aligned} \quad (26.9)$$

выражения под интегралом и самого интеграла (26.1) (δF_1 исчезает при интегрировании по контуру)

$$J = \oint_{\bar{C}} \{a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p\}. \quad (26.10)$$

$H = p$. В (26.3): $q = q^0 + t$, $p = p^0$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$J(t) = \oint_{\bar{C}_0} \{a(q^0 + t, p^0)\delta q^0 + b(q^0 + t, p^0)\delta p^0\}.$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату

$$j(0) = \oint_{\bar{C}_0} \left\{ \frac{\partial a(q^0, p^0)}{\partial q_0} \delta q^0 + \frac{\partial b(q^0, p^0)}{\partial q_0} \delta p^0 \right\} = 0.$$

Дальнейшие вычисления аналогичны случаю $H = 0$. Приведем последовательность формул:

$$\frac{\partial f_2(q,p)}{\partial q} = \frac{\partial a(q,p)}{\partial q}, \quad \frac{\partial f_2(q,p)}{\partial p} = \frac{\partial b(q,p)}{\partial p};$$

$$f_2(q,p) = \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial q};$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(a - \frac{\partial F_2}{\partial q} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q} \left(b - \frac{\partial F_2}{\partial p} \right) = 0;$$

$$a(q,p) = \tilde{a}(p) + \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial q},$$

$$b(q,p) = \tilde{b}(p) + \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial p};$$

$$a\delta q + b\delta p = \tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p + \delta F_2(q,p); \quad (26.11)$$

$$J = \oint_{\tilde{C}} \{\tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p\}. \quad (26.12)$$

$H = -q$. В (26.3): $q = q^0$, $p = p^0 + t$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$J(t) = \oint_{\tilde{C}_0} \{\tilde{a}(p^0 + t)\delta q^0 + \tilde{b}(p^0 + t)\delta p^0\}.$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату (q^0 , p^0 заменяем на q , p)

$$\dot{J}(0) = \oint_{\tilde{C}_0} \left\{ \frac{d\tilde{a}(p)}{dp} \delta q + \frac{d\tilde{b}(p)}{dp} \delta p \right\} = 0,$$

вследствие которого выражение под интегралом должно быть полным дифференциалом (изохронным) некоторой функции $f_3(q,p)$:

$$\frac{\partial f_3(q,p)}{\partial q} = \frac{d\tilde{a}(p)}{dp}, \quad \frac{\partial f_3(q,p)}{\partial p} = \frac{d\tilde{b}(p)}{dp},$$

т. е. для функции $\tilde{f}(q,p) = f_3(q,p) - \tilde{b}(p)$ должно выполняться

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} = \frac{d\tilde{a}(p)}{dp}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = 0.$$

В левой части первого уравнения находится функция, независящая от p (см. второе уравнение), в правой — независящая от q , поэтому каждая часть равна постоянной c , откуда следует

$$\tilde{a}(p) = cp + c_1, \quad \tilde{f} = cq + c_2.$$

Подстановка $\tilde{a}(p)$ в форму под интегралом (26.12) определяет формулу

$$\tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p = cp\delta q + \delta(c_1q + \int \tilde{b}(p)dp). \quad (26.13)$$

Последовательная подстановка (26.13) в (26.11), затем (26.11) в (26.9) приводит к доказываемому результату (26.2), функция F в котором строится по функциям, определенным в процессе доказательства:

$$F = -(c_1q + F_2(q,p) + F_1(t,q,p)) + \int \tilde{b}(p)dp.$$

Доказательство общего случая ($n > 1$) требует дополнительных «пробных» функций $H(t,q,p)$, что приводит к более громоздким вычислениям.

Доказательство б) \Rightarrow а). Интегрирование соотношения (26.2) по произвольному изохронному контуру приводит к связи между интегралом (26.1) и инвариантом Пуанкаре (24.6) $J = cJ_{\Pi}$ ($\oint \delta F = 0$), вследствие которого результат а) очевиден. ■

Сформулируем результат (следствие из теоремы 26.1), при помощи которого конструктивно проверяется, является ли конкретный интеграл (26.1) универсальным интегральным инвариантом.

Следствие. *Интеграл (26.1) является универсальным интегральным инвариантом тогда и только тогда, когда при некотором числе c выполняются условия*

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial A_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial B_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial B_k}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial B_k}{\partial q_i} + c\delta_{ik} \end{aligned} \quad (26.14)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера) интегрируемости системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - A_i(t,q,p), \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= -B_i(t,q,p). \end{aligned} \quad (26.15)$$

□ Раскрытие в (26.2) изохронного дифференциала $F(t, q, p)$ и приравнивание коэффициентов при δq_i , δp_i приводит к системе (26.15). Условия (26.14) есть условия интегрируемости ($\partial^2 F / \partial q_i \partial q_k = \partial^2 F / \partial q_k \partial q_i$, ... системы (26.15). ■

Глава VI. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

§ 27. Канонические преобразования: определение, основной критерий

Как было установлено, поведение голономной системы при любом выборе обобщенных координат может быть описано уравнениями Лагранжа — в этом смысле ковариантности уравнений Лагранжа. Другими словами, переход к другим обобщенным координатам всегда влечет перевод уравнений Лагранжа опять в уравнения Лагранжа. Формула (21.12), связывающая лагранжианы в разных координатах, была выведена в § 21. Иначе обстоит дело в случае уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}\tag{27.1}$$

Замена переменных в уравнениях (27.1) может или приводить к уравнениям Гамильтона, или нет.

Пример 27.1. Одномерному осциллятору соответствует функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)\tag{27.2}$$

и уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\omega^2 q.\end{aligned}\tag{27.3}$$

Замена переменных

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= p, \\ \tilde{p} &= qe^p\end{aligned}\tag{27.4}$$

приведет к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}} &= -\omega^2 \tilde{p}e^{-\tilde{q}}, \\ \dot{\tilde{p}} &= \tilde{q}e^{\tilde{q}} - \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}.\end{aligned}\tag{27.5}$$

Для выяснения, является ли полученная система гамильтоновой, требуется исследовать на интегрируемость систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} &= -\omega^2 \tilde{p} e^{-\tilde{q}}, \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} &= -\tilde{q} e^{\tilde{q}} + \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}.\end{aligned}\tag{27.6}$$

Условие интегрируемости

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \tilde{p} \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} (-\tilde{q} e^{\tilde{q}} + \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}) \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} (-\omega^2 \tilde{p} e^{-\tilde{q}})\end{aligned}\tag{27.7}$$

не выполнено, поэтому система (27.6) не имеет решения, а система (27.5) не является гамильтоновой.

Пример 27.2. Замена переменных

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= p, \\ \tilde{p} &= q + e^p\end{aligned}\tag{27.8}$$

в системе (27.3) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}} &= \omega^2 (e^{\tilde{q}} - \tilde{p}), \\ \dot{\tilde{p}} &= \tilde{q} + \omega^2 (e^{\tilde{q}} - \tilde{p}) e^{\tilde{q}}.\end{aligned}\tag{27.9}$$

Нетрудно убедиться в том, что аналогичное (27.7) условие интегрируемости для системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} &= \omega^2 (e^{\tilde{q}} - \tilde{p}), \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} &= -\tilde{q} - \omega^2 (e^{\tilde{q}} - \tilde{p}) e^{\tilde{q}}\end{aligned}\tag{27.10}$$

выполнено, поэтому система (27.9) в переменных \tilde{q} , \tilde{p} является гамильтоновой. Функция Гамильтона \tilde{H} находится интегрированием уравнений (27.10):

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2} \left[\tilde{q}^2 + \omega^2 (e^{\tilde{q}} - \tilde{p})^2 \right].\tag{27.11}$$

Заметим, что если сделать замену переменных (35.8) в исходной функции Гамильтона (27.2), то получим не функцию (27.11), а обратную ей по знаку.

Определение 27.1. Неособенное преобразование переменных

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q, p), \\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n},\end{aligned}\tag{27.12}$$

$$\det M \neq 0,\tag{27.13}$$

$$M = \left\| \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k} \end{array} \right\| \right\|\tag{27.14}$$

называется **каноническим**, если замена переменных (27.12) в любой гамильтоновой системе приводит опять к гамильтоновой системе, M — матрица Якоби преобразования (27.12).

Пример 27.1 показывает, что преобразование (27.4) не является каноническим, а про преобразование (27.8) из примера 27.2 ничего определенного сказать нельзя: для каноничности требуется перевод любой гамильтоновой системы в гамильтонову. В данной главе используются следующие обозначения: $dF(t, q, p)$ для полного дифференциала; $\delta F(t, q, p)$ — для изохронного (при фиксированном времени t), т. е. справедливо равенство

$$dF = \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Докажем основной критерий каноничности.

Теорема 27.1 (основной критерий). Следующие два утверждения эквивалентны:

а) преобразование (27.12) является каноническим;

б) существуют такое число c (**валентность**) и функция F (**производящая функция**), что в силу преобразования (27.12) справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) - dF.\tag{27.15}$$

□ Доказательство а) \Rightarrow б). Дано, что преобразование (27.12) каноническое и что система (27.1) с функцией H перешла в систему с функцией \tilde{H} . Требуется доказать, что при некоторых c и F справедливо (27.15). В пространствах (t, q, p) и $(t, \tilde{q}, \tilde{p})$ рассмотрим согласованные преобразованием (27.12) контуры C, \tilde{C} и соответствующие функциям H, \tilde{H} трубки прямых путей (см. рис. 27.1). В один и тот же момент времени t введем согласованные изохронные контуры \tilde{C} и $\tilde{\tilde{C}}$. Справедливы равенства

$$\oint_C \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i, \quad (27.16)$$

$$\oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = \oint_{\tilde{\tilde{C}}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i. \quad (27.17)$$

В (27.17) сделаем переход к переменным t, q, p , применим теорему 26.1 и используем (27.16):

$$\begin{aligned} \oint_C \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt &= \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i = \\ &= \oint_C \sum_{i,k=1}^n \tilde{p}_i \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k} \delta p_k \right) = \\ &= \oint_C \sum_{k=1}^n (A_k \delta q_k + B_k \delta p_k) = c \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \\ &= c \oint_C \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt. \end{aligned}$$

Приравнивание первого и последнего выражения в цепочке равенств определяет результат

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt - c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) \right] = 0.$$

Так как контур C произволен, подынтегральное выражение есть полный дифференциал $(-dF)$, что и приводит к равенству (27.15).

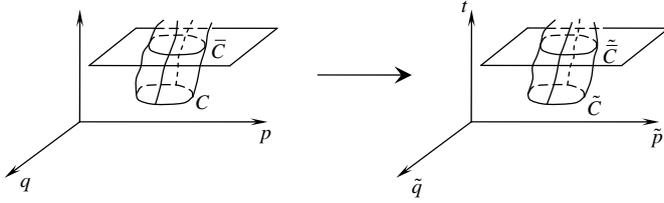


Рис. 27.1

Доказательство б) \Rightarrow а). Даны: преобразование (27.12), число c и функция F . Дано также, что для любой функции $H(t, q, p)$ найдется такая функция $\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p})$, что равенство (27.15) выполняется тождественно. Требуется доказать, что замена переменных (27.12) в системе (27.1) приводит к гамильтоновой системе с гамильтонианом $\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p})$. Как и при доказательстве а) \Rightarrow б), построим согласованные контуры C, \tilde{C} и соответствующие трубки прямых путей (см. рис. 27.1). Считаем, что в (27.15) все функции выражены через t, q, p , проинтегрируем (27.15) по контуру C :

$$c \oint_C \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = \oint_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt.$$

Последнее равенство есть результат перехода от переменных t, q, p к переменным t, \tilde{q}, \tilde{p} (контур C переходит в контур \tilde{C}). Так как первый интеграл в цепочке равенств на различных согласованных контурах, охватывающих трубку прямых путей, принимает одно и то же значение, таким же свойством обладает и последний интеграл. По теореме 24.2 система в переменных t, \tilde{q}, \tilde{p} является гамильтоновой с функцией Гамильтона \tilde{H} . ■

Следствие 1. Пусть каноническому преобразованию (27.12) соответствуют валентность $c \neq 0$ и производящая функция F . Обратное к нему преобразование также каноническое с валентностью $\tilde{c} = 1/c$ и производящей функцией $\tilde{F} = -F/c$.

□ По формуле (27.15) решается вопрос о каноничности преобразования $q, p \longrightarrow \tilde{q}, \tilde{p}$. Обратное преобразование $\tilde{q}, \tilde{p} \longrightarrow q, p$ удовлетворяет этой же формуле (27.15), переписанной иначе:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \frac{1}{c} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt \right) - \frac{1}{c} d(-F),$$

что и доказывает утверждение следствия. ■

Формула (27.15) концентрирует в себе исследование вопроса о каноничности преобразования (27.12) и в случае положительного ответа дает связь между функциями Гамильтона. При практическом использовании формулы (27.15) требуется сделать в ней переход к некоторым независимым переменным и, приравнявая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в левой и правой частях, получить $(2n + 1)$ условие. Решение конкретного вопроса, связанного с каноническими преобразованиями, приводит к целесообразности конкретного выбора $2n$ независимых координат из набора $4n$ координат: $q, p, \tilde{q}, \tilde{p}$.

§ 28. Варианты выбора независимых переменных в основном критерии

Рассматривается несколько вариантов наборов независимых переменных в равенстве (27.15). Целесообразность выбора конкретного набора обосновывается доказательством утверждений.

1. q, p . Этот выбор является наиболее естественным. При переходе к этим координатам требуется в (27.15) раскрыть дифференциалы $d\tilde{q}(t, q, p)$ и $dF(t, q, p)$. Результат приравнивания коэффициентов при dt приводит к формуле

$$\tilde{H} = cH + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (28.1)$$

Равенство коэффициентов при dq_i, dp_i запишем в виде системы уравнений для производящей функции $F(t, q, p)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i}. \end{aligned} \quad (28.2)$$

Проверка на каноничность сводится к вопросу: будут ли при некотором числе c выполняться условия интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial F}{\partial q_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial F}{\partial p_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_l}, \dots$$

Проверим на каноничность преобразования (27.4) и (27.8) из примеров 27.1 и 27.2.

Пример 28.1. Подстановка преобразования (27.4) в уравнения (28.2) приводит к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q} &= cp, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= -qe^p.\end{aligned}$$

Вычисление $\partial^2 F / \partial q \partial p$ при помощи первого уравнения дает число c , а при помощи второго — функцию $(-e^p)$. Так как ни при каком числе c условие интегрируемости ($c \equiv -e^p$) не выполняется, то преобразование (27.4) не является каноническим, т. е. не любую гамильтонову систему переводит в гамильтонову, но в частных случаях это возможно. Например, уравнения Гамильтона $\dot{q} = p$, $\dot{p} = 0$ для свободной частицы $H = \frac{1}{2}p^2$ переходят в уравнения Гамильтона $\dot{\tilde{q}} = 0$, $\dot{\tilde{p}} = \tilde{q}e^{\tilde{q}}$ ($\tilde{H} = (1 - \tilde{q})e^{\tilde{q}}$).

Пример 28.2. Подстановка преобразования (27.8) в уравнения (28.2) приводит к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q} &= cp, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= -q - e^p,\end{aligned}$$

для которой условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = \frac{\partial(cp)}{\partial p} = \frac{\partial(-q - e^p)}{\partial q}$$

выполнено при $c = -1$, т. е. преобразование (27.8) каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией $F = -qp - e^p + f(t)$ ($f(t)$ — произвольная функция). Функция Гамильтона $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$, определяющая уравнения Гамильтона в переменных \tilde{q} , \tilde{p} , связана с гамильтонианом $H(q, p)$ в исходных переменных q , p формулой (28.1):

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = -H(\tilde{p} - e^{\tilde{q}}, \tilde{q}) + f(t).$$

Валентность $c = -1$ объясняет экспериментально полученный знак минус в правой части (27.11). Добавление к H произвольной функции $f(t)$ не оказывает влияния на правые части уравнений Гамильтона (27.1), поэтому обычно полагают $f(t) \equiv 0$, что было и сделано при интегрировании системы (27.10).

Пример 28.3. Пусть задан переход от одних обобщенных координат к другим

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q), \quad i = \overline{1, n}, \quad (28.3)$$

$$\det \|a_{ik}(t, q)\| \neq 0, \quad (28.4)$$

где

$$\|a_{ik}(t, q)\| = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \right\|. \quad (28.5)$$

Как надо преобразовывать импульсы

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}, \quad (28.6)$$

чтобы получить в совокупности (28.3), (28.6) каноническое преобразование? Подстановка (28.3), (28.6) в систему (28.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Из последних n уравнений заключаем, что F не зависит от p_i . Решаем алгебраически первые n уравнений относительно \tilde{p}_k , получаем преобразование (28.6):

$$\tilde{p}_i = c \sum_{k=1}^n b_{ik}(t, q) p_k - \sum_{k=1}^n b_{ik}(t, q) \frac{\partial F(t, q)}{\partial q_k}, \quad (28.7)$$

где $F(t, q)$ — произвольная функция, $b_{ik}(t, q)$ — элементы матрицы, обратной к (28.5), c — любое неравное нулю число (при $c = 0$ у отображения (28.3), (28.7) отсутствует ему обратное, далее будет показано, что канонических преобразований с валентностью $c = 0$ не существует).

Замечание 28.1. Полученный результат (28.7) приводит, в частности, к следующему выводу: знание валентности c и производящей

функции F не позволяет однозначно восстановить каноническое преобразование. Так, пара $c = 1$, $F(t, q, p) \equiv 0$ соответствует каноническим преобразованиям

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q), \quad \tilde{p}_i = \sum_{k=1}^n b_{ik}(t, q) p_k$$

при любых функциях $\tilde{q}_i(t, q)$, удовлетворяющих (28.4).

Замечание 28.2. Классу преобразований (28.3), (28.7) принадлежат канонические преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i, \\ \tilde{p}_i &= c p_i - \frac{\partial F(t, q)}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (28.8)$$

с тождественным преобразованием обобщенных координат и с произвольными числом $c \neq 0$ и функцией $F(t, q)$ в преобразовании импульсов. Множество преобразований (28.8) подчеркивает вспомогательную роль обобщенных импульсов p . Если совокупность движений $\{q(t)\}$ системы задается уравнениями Гамильтона, определенными гамильтонианом $H(t, q, p)$, то эта же совокупность $\{q(t)\}$ задается уравнениями Гамильтона, определенными множеством гамильтонианов (см. (28.1) и (28.8))

$$\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p}) = cH \left(t, \tilde{q}, \frac{1}{c} \left(\tilde{p} + \frac{\partial F(t, \tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \right) \right) + \frac{\partial F(t, \tilde{q})}{\partial t}.$$

2. \tilde{q}, \tilde{p} . В этих переменных удобно доказывается следующий результат.

Теорема 28.1. Для валентности c канонического преобразования справедливо $c \neq 0$.

□ В противном случае ($c = 0$) из (27.15) при независимых переменных t, \tilde{q}, \tilde{p} следовало бы

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = -dF = \\ & = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} d\tilde{p}_i \right) - \frac{\partial F}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, приходим к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} &= -\tilde{p}_i, \\ \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \tilde{H}.\end{aligned}$$

Полученная система не имеет решения: из первой группы уравнений следует $\partial^2 F / \partial \tilde{q}_i \partial \tilde{p}_i = -1$, из второй — $\partial^2 F / \partial \tilde{q}_i \partial \tilde{p}_i = 0$. ■

При решении многих вопросов, связанных с каноническими преобразованиями, можно ограничиться случаем $c = 1$ (см., например, § 31). Во многих книгах по аналитической механике и теоретической физике иная возможность ($c \neq 1$) и не упоминается.

Определение 28.1. *Каноническое преобразование при $c = 1$ называется унивалентным.*

3. q, \tilde{q} . В качестве недостатков набора независимых переменных q, p (аналогично \tilde{q}, \tilde{p}) можно отметить громоздкость уравнений (28.2) для производящей функции F и то, что производящая функция F не определяет (в совокупности с валентностью) однозначно канонического преобразования (см. замечание 28.1). Оба недостатка могут быть устранены, если в качестве независимых переменных брать другие наборы. Одним из таких наборов является набор t, q, \tilde{q} , который будем называть **свободным**. Название оправдано тем, что дифференциалы от этих переменных находятся в формуле (27.15) «на свободе». Переменные t, q, \tilde{q} не для каждого преобразования могут быть приняты в качестве независимых. Это возможно, если оставшиеся переменные p, \tilde{p} могут быть выражены через свободные. Такое выражение осуществимо, если для преобразования (27.12) справедливо

$$\det \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0. \quad (28.9)$$

Тогда зависимость $p(t, q, \tilde{q})$ найдется из первых n уравнений в (27.12), а зависимость $\tilde{p}(t, q, \tilde{q})$ найдется в результате подстановки $p(t, q, \tilde{q})$ в последние n уравнений (27.12). Преобразованию (27.12) при условии

(28.9) можно придать эквивалентную форму

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t, q, \tilde{q}), \\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q, \tilde{q}), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (28.10)$$

Для обратного перехода (28.10) \rightarrow (27.12) нужно первые n уравнений в (28.10) разрешить относительно \tilde{q} (соответствующая матрица Якоби является обратной по отношению к матрице, участвующей в (28.9), поэтому невырождена), результат разрешения подставить в последние n уравнений. Как будет показано далее, по функциям (28.10) удобно судить о каноничности исходного преобразования (27.12), и поиск преобразования, удовлетворяющего определенным свойствам, также удобно вести в терминах функций (28.10).

Определение 28.2. Неособенное преобразование (27.12) называется **свободным**, если для него выполнено условие (28.9).

Пусть преобразование (27.12) является свободным. Сделаем при помощи (28.10) переход в (27.15) к независимым переменным t, q, \tilde{q} :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \tilde{p}(t, q, \tilde{q})_i d\tilde{q}_i - \tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p}(t, q, \tilde{q})) dt = \\ & = c \left(\sum_{i=1}^n p_i(t, q, \tilde{q}) dq_i - H(t, q, p(t, q, \tilde{q})) dt \right) - \\ & \quad - \frac{\partial S}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i. \end{aligned} \quad (28.11)$$

Введено обозначение для производящей функции

$$S(t, q, \tilde{q}) = F(t, \tilde{q}, \tilde{p}(t, q, \tilde{q})).$$

Приравнивая в (28.11) коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим связь между функциями Гамильтона:

$$\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p}(t, q, \tilde{q})) = \frac{\partial S}{\partial t} + cH(t, q, p(t, q, \tilde{q})) \quad (28.12)$$

и систему уравнений, которая связывает каноническое преобразование в форме (28.10) с производящей функцией S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= cp_i(t, q, \tilde{q}), \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} &= -\tilde{p}_i(t, q, \tilde{q}). \end{aligned} \quad (28.13)$$

Каноничность преобразования (27.12) определяется условиями интегрируемости системы (28.13), наложенными на функции (28.10):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_i} = c \frac{\partial p_i(t, q, \tilde{q})}{\partial q_i} \stackrel{?}{=} c \frac{\partial p_i(t, q, \tilde{q})}{\partial q_k}, \dots$$

Пример 28.4. Преобразование (27.4) из примера 27.1 удовлетворяет условию свободности (28.9) и представляется в форме (28.10):

$$\begin{aligned} p &= \tilde{q}, \\ \tilde{p} &= qe^{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Система (28.13) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= c\tilde{q}, \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} &= -qe^{\tilde{q}} \end{aligned}$$

и ни при каком значении числа c не является интегрируемой: из первого уравнения $\partial^2 S / \partial q \partial \tilde{q} = c$, из второго уравнения $\partial^2 S / \partial q \partial \tilde{q} = -e^{\tilde{q}}$. Преобразование (27.4) — неканоническое.

Пример 28.5. Преобразование (27.8) из примера 27.2 удовлетворяет условию свободности (28.9) и представляется в форме (28.10):

$$\begin{aligned} p &= \tilde{q}, \\ \tilde{p} &= q + e^{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Система (28.13) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= c\tilde{q}, \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} &= -q - e^{\tilde{q}} \end{aligned}$$

и при $c = -1$ интегрируема: из первого уравнения $\partial^2 S / \partial q \partial \tilde{q} = c$, из второго уравнения $\partial^2 S / \partial q \partial \tilde{q} = -1$. Преобразование (27.8) — каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией $S = -q\tilde{q} - e^{\tilde{q}}$.

В отличие от производящей функции $F(t, q, p)$ в независимых переменных t, q, p (аналогичная ситуация в переменных t, \tilde{q}, \tilde{p}) функция $S(t, q, \tilde{q})$ по настоящему «производит»: при помощи (28.13) по

функции $S(t, q, \tilde{q})$ и валентности $c \neq 0$ однозначно находятся формулы (28.10). Для перехода к виду (27.12) надо решить первые n уравнений системы (28.10) относительно \tilde{q} и подставить $\tilde{q}(t, q, p)$ в оставшиеся уравнения (28.10). Уравнения $p_i = p_i(t, q, \tilde{q})$ решаются относительно \tilde{q}_i при условии на матрицу Якоби (используются первые n уравнений системы (28.13))

$$\det \left\| \frac{\partial p_i(t, q, \tilde{q})}{\partial \tilde{q}_k} \right\| = \frac{1}{c^n} \det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| \neq 0.$$

Таким образом, каноническое преобразование (27.12) однозначно определяется производящей функцией $S(t, q, \tilde{q})$ и валентностью $c \neq 0$ при условии

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| \neq 0. \quad (28.14)$$

Например, функция $S = q\tilde{q}$ и число $c = 1$ определяют с использованием (28.13) формулы (28.10)

$$p = \tilde{q}, \quad \tilde{p} = -q.$$

и свободное унивалантное каноническое преобразование (27.12)

$$\tilde{q} = p, \quad \tilde{p} = -q. \quad (28.15)$$

Отметим определенный ущерб переменных q, \tilde{q} . Очевидно, что тождественное преобразование $\tilde{q}_i = q_i, \tilde{p}_i = p_i$ переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову, т. е. оно является каноническим, но оно не является свободным — не выполнено условие (28.9). Одно из следствий этого обстоятельства: совокупность свободных канонических преобразований не есть группа преобразований. Другое следствие: не везде определена главная функция Гамильтона (см. определение 29.1) — производящая функция одного из важных канонических преобразований (преобразование фазового пространства фазовым потоком гамильтоновой системы). Указанный ущерб устраняется, в частности, следующим выбором независимых переменных.

4. q, \tilde{p} . Выбор возможен при следующем условии для преобразования (27.12):

$$\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0. \quad (28.16)$$

При выполнении (28.16) зависимость $p_i(t, q, \tilde{p})$ находится из последних n уравнений преобразования (27.12), а зависимость $\tilde{q}_i(t, q, \tilde{p})$ — подстановкой $p_i(t, q, \tilde{p})$ в первые n уравнений. Преобразование (27.12) в независимых переменных q, \tilde{p} принимает вид

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t, q, \tilde{p}), \\ \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q, \tilde{p}), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (28.17)$$

Определение 28.3. Преобразование (27.12) будем называть **полусвободным**, если для него выполнено условие (28.16).

«Полусвобода» заключается в том, для размещения дифференциалов $dq, d\tilde{p}$ «на свободе» требуется применить некоторые усилия, а именно, заменить условие каноничности (27.15) эквивалентной формулой

$$-\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i d\tilde{p}_i - \tilde{H} dt = c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) - d\Phi(t, q, \tilde{p}), \quad (28.18)$$

где обозначено

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{q}_i,$$

и предполагается, что вместо переменных \tilde{q}, p подставлены функции (28.17) (в том числе и в H, \tilde{H}). Равенство (28.18) определяет взаимосвязь

$$\tilde{H}(t, \tilde{q}(t, q, \tilde{p}), \tilde{p}) = \frac{\partial \Phi(t, q, \tilde{p})}{\partial t} + cH(t, q, p(t, q, \tilde{p})) \quad (28.19)$$

функций Гамильтона и систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} &= cp_i(t, q, \tilde{p}), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{p}_i} &= \tilde{q}_i(t, q, \tilde{p}), \end{aligned} \quad (28.20)$$

интегрируемость которой при некотором числе $c \neq 0$ гарантирует каноничность преобразования (27.12). Аналогично свободным преобразованиям пара $c \neq 0, \Phi(t, q, \tilde{p})$ при выполнении условия

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \Phi(t, q, \tilde{p})}{\partial q_i \partial \tilde{p}_k} \right\| \neq 0. \quad (28.21)$$

единственным образом порождает полусвободное каноническое преобразование (27.12). К примеру, пара $c = 1$, $\Phi = q\tilde{p}$ ((28.21) выполнено) определяет при помощи (28.20) систему (28.17): $\tilde{q} = q$, $p = \tilde{p}$, разрешив которую относительно \tilde{q} , \tilde{p} , получим полусвободное тождественное преобразование: $\tilde{q} = q$, $\tilde{p} = p$.

Пример 28.6. Преобразование (27.8) из примера 27.2 удовлетворяет условию полусвободности (28.16) и представляется в форме (28.17):

$$\begin{aligned} p &= \ln(\tilde{p} - q), \\ \tilde{p} &= \ln(\tilde{p} - q). \end{aligned}$$

Система (28.20) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial q} &= c \ln(\tilde{p} - q), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \tilde{p}} &= \ln(\tilde{p} - q) \end{aligned}$$

и при $c = -1$ интегрируема: из первого уравнения $\partial^2\Phi/\partial q\partial\tilde{p} = c/(\tilde{p}-q)$, из второго уравнения $\partial^2\Phi/\partial q\partial\tilde{p} = -1/(\tilde{p}-q)$. Преобразование (27.8) — каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией

$$\Phi = (\tilde{p} - q) \ln(\tilde{p} - q) - (\tilde{p} - q).$$

До сих пор в построениях участвовали следующие наборы независимых переменных: 1. q, p ; 2. \tilde{q}, \tilde{p} ; 3. q, \tilde{q} ; 4. q, \tilde{p} . Переменные 3. q, \tilde{q} , 4. q, \tilde{p} в качестве независимых удобны для синтеза канонического преобразования. Например, в § 31 решается вопрос нахождения унивалентного канонического преобразования, в результате которого конкретная гамильтонова система упростится до «дальше некуда». Поиск преобразования в форме (28.10) или (28.17) позволяет вместо $2n$ функций, определяющих каноническое преобразование (27.12), составить и по возможности решить уравнение относительно одной функции S (или Φ), по которой однозначно определяется преобразование (27.12). Не для каждого преобразования (27.12) выполняется одно из условий (28.9) или (28.6), в чем можно убедиться на примере (преобразование каноническое с $c = 1$ и $F = p_1q_1$ в (27.15))

$$\tilde{q}_1 = -p_1, \quad \tilde{q}_2 = q_2, \quad \tilde{p}_1 = q_1, \quad \tilde{p}_2 = p_2. \quad (28.22)$$

Доказывается¹, что для любого преобразования (27.12) — (27.14) существует набор $2n$ переменных

$$q_1, \dots, q_l, p_{l+1}, \dots, p_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n \quad (28.23)$$

(возможно с перенумерацией), которые могут быть приняты за независимые, т. е. прочие переменные выражаются через них. В преобразовании (28.22) в качестве независимых переменных можно взять переменные (28.23):

$$q_1, q_2, \tilde{q}_1, \tilde{p}_2. \quad (28.24)$$

Остальные переменные выражаются через них следующим образом:

$$p_1 = -\tilde{q}_1, \quad p_2 = \tilde{p}_2, \quad \tilde{q}_2 = q_2 \quad \tilde{p}_1 = q_1. \quad (28.25)$$

Набор (28.23) характерен отсутствием в нем пар q_i, p_i и \tilde{q}_i, \tilde{p}_i , что позволяет, аналогично тому, как это было сделано в случае 4. q, \tilde{p} , эквивалентной заменой равенства (27.15) добиться того, чтобы дифференциалы от переменных (28.23) и только от них были «на свободе». Для преобразования (28.22) результат таков:

$$\tilde{p}_1 d\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 d\tilde{p}_2 - \tilde{H} dt = c(p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - H dt) - dU,$$

где обозначено

$$U(t, q_1, q_2, \tilde{q}_1, \tilde{p}_2) = F + \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 = F + q_2 \tilde{p}_2.$$

Также на примере преобразования (28.22) приведем результат приравнивания коэффициентов при дифференциалах от независимых переменных:

$$\tilde{H}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\partial U}{\partial t} + cH(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (28.26)$$

с подстановкой в обе части (28.25),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= cp_1 = -c\tilde{q}_1, \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} &= cp_2 = c\tilde{p}_2, \\ \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_1} &= -\tilde{p}_2 = -q_1, \\ \frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_2} &= \tilde{q}_2 = q_2. \end{aligned} \quad (28.27)$$

¹Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике—2-е изд.—М.: Наука, 1966. 300 с., § 29, с.176.

Исследование системы (28.27) на интегрируемость приводит к результату $c = 1$, $U = -q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{p}_2$, по которому можно осуществить обратный переход: при помощи системы (28.27) к — уравнениям (28.25) и далее — к преобразованию (28.22).

§ 29. Фазовый поток гамильтоновой системы и канонические преобразования

Естественным классом канонических преобразований является фазовый поток: совокупность преобразований $\{q^0, p^0\} \longrightarrow \{q, p\}$ фазового пространства, которые определяются при разных фиксированных значениях t общим решением

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, q^0, p^0), \\ p_i &= p_i(t, q^0, p^0), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (29.1)$$

гамильтоновой системы, заданной некоторой функцией Гамильтона $H(t, q, p)$. При $t = t_0$ преобразование (29.1) является тождественным $q_i = q_i^0, p_i = p_i^0$ с якобианом (27.13) равным единице, поэтому при близких к t_0 значениях t преобразование обратимо:

$$\begin{aligned} q_i^0 &= q_i^0(t, q, p), \\ p_i^0 &= p_i^0(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (29.2)$$

Функции, задающие преобразование (29.2), — первые интегралы системы, для них в соответствии с определением 20.1 выполняется

$$\dot{q}_i^0 = 0, \quad \dot{p}_i^0 = 0,$$

т. е. они есть решение гамильтоновой системы, заданной функцией Гамильтона $H_0 = 0$.

Теорема 29.1. Преобразование $\{q^0, p^0\} \longrightarrow \{q, p\}$, заданное общим решением (29.1) гамильтоновой системы, и обратное ему (29.2) — унивалентные канонические преобразования. Производящая функция преобразования (29.2) — действие по Гамильтону (21.1)

$$W(t, q^0, p^0) = \int_{t_0}^t L(s, q(s, q^0, p^0), \dot{q}(s, q^0, p^0)) ds, \quad (29.3)$$

в подынтегральное выражение которого подставлено преобразование (29.1), нижний предел t_0 фиксирован (значению t_0 соответствуют q^0, p^0 в (29.1) – (29.3)), верхний предел t является переменным. Производящая функция обратного к (29.2) преобразования (29.1): $-W$.

□ Пусть система определена функциями Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ и Гамильтона $H(t, q, p)$. На решении $\bar{q}(t), \bar{p}(t)$, соответствующем начальным данным $t_0, \bar{q}_0, \bar{p}_0$, фиксируем произвольный текущий момент $t = \bar{t}_1$ и проварьируем (см. определение 21.1) решение специальным образом: а именно, включим в однопараметрическое семейство $q(t, \alpha)$ ($q(t, 0) = \bar{q}(t)$) прямых путей – решений с начальными данными

$$\begin{aligned} t_0(\alpha) &\equiv t_0, & q_i^0(\alpha) &= q_i(t_0, \alpha), & \dot{q}_i^0(\alpha) &= \dot{q}_i(t_0, \alpha), \\ p_i^0(\alpha) &= p(t_0, \alpha) & &= \frac{\partial L(t_0, q^0(\alpha), \dot{q}^0(\alpha))}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

В отличие от общего случая не варьируется начальный момент $t_0(\alpha) \equiv t_0$ (ср. рис. 21.2 и рис. 29.1). Конечные точки у представителей семейства $q(t, \alpha)$ определяются зависимостью $t_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned} t_1(\alpha), & \quad q_i^1(\alpha) = q_i(t_1(\alpha), \alpha), & \dot{q}_i^1(\alpha) &= \dot{q}_i(t_1(\alpha), \alpha), \\ p_i^1(\alpha) &= p(t_1(\alpha), \alpha) & &= \frac{\partial L(t_1(\alpha), q^1(\alpha), \dot{q}^1(\alpha))}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \quad (29.5)$$

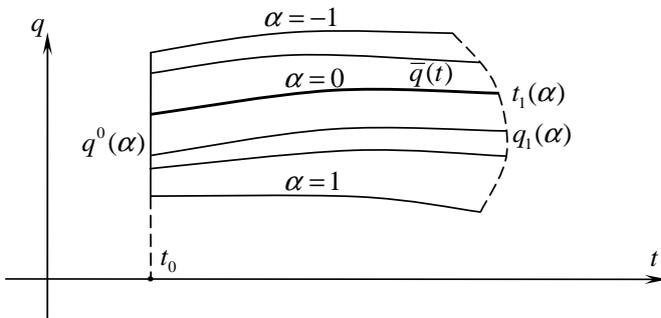


Рис. 29.1

На рис. 29.1 изображен результат варьирования. К изображению можно отнести как к проекции части трубки прямых путей на подпространство (t, q) : кривая начальных точек $t_0(\alpha) \equiv t_0, q^0(\alpha) -$

проекция некоторого изохронного контура \bar{C}_0 (см. рис. 24.2), кривая конечных точек $t_1(\alpha)$, $q^1(\alpha)$ — проекция любого другого согласованного с \bar{C}_0 контура C . Семейство решений при фиксированном значении t_0 однозначно определено функциями $t_1(\alpha)$, $q^0(\alpha)$, $p^0(\alpha)$. Подставим эти функции в (29.3), вычислим дифференциал dW , получим соотношение

$$\begin{aligned} dW(t_1, q^0, p^0) &= \\ &= \frac{\partial W}{\partial t_1} dt_1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial q_i^0} dq_i^0 + \frac{\partial W}{\partial p_i^0} dp_i^0 \right) = \\ &= \left\{ \frac{\partial W}{\partial t_1} \frac{dt_1}{d\alpha} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial q_i^0} \frac{dq_i^0}{d\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_i^0} \frac{dp_i^0}{d\alpha} \right) \right\} d\alpha = \\ &= \frac{dW}{d\alpha} d\alpha = \delta W. \end{aligned} \quad (29.6)$$

Из (29.6) следует, что полный дифференциал dW совпадает при данном варьировании с вариацией (см. определение 21.2) и определяется формулой (21.3), которая при $\alpha = 0$ с учетом специфики использованного варьирования (см. (29.4), (29.5)) принимает вид

$$dW(t, q^0, p^0) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H(t, q, p) dt - \sum_{i=1}^n p_i^0 dq_i^0. \quad (29.7)$$

Интегральное выражение в (21.3) равно нулю, так как все предшественники семейства $q(t, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа, δt во второй квадратной скобке в (21.3) равно нулю, вследствие $t_0(\alpha) \equiv t_0$. К замене δq , δt , δq^0 на dq , dt , dq^0 привели вычисления, аналогичные (29.6). Значение $\alpha = 0$ определяет решение $q(t, 0) = \bar{q}(t)$, соответствующее начальным данным $t = t_0$, $\bar{q}^0 = q^0(0)$, $\bar{p}^0 = p^0(0)$ и текущим значениям $t = \bar{t}_1 = t_1(0)$, $q = q^1(0) = \bar{q}(\bar{t}_1) = \bar{q}(t)$, $p = p^1(0) = \bar{p}(\bar{t}_1) = \bar{p}(t)$ (ввиду произвольности исходного решения в (29.7) сделана замена $\bar{q}_0, \bar{p}_0, \bar{q}, \bar{p}$ на q_0, p_0, q, p).

Соотношение (29.7), записанное иначе

$$\sum_{i=1}^n p_i^0 dq_i^0 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H(t, q, p) dt - dW(t, q^0, p^0), \quad (29.8)$$

совпадает с равенством (27.15) и подтверждает унивалентность и каноничность преобразования (29.2). Подтверждает также, что пе-

ременным q^0 , p^0 соответствует функция Гамильтона $H_0 \equiv 0$. Унивалентность, каноничность и вид производящей функции у преобразования (29.3) подтверждается следствием 1 из теоремы 27.1. ■

Вывод и запись условия каноничности (29.8) преобразования (29.2) сделаны при выборе независимых переменных \tilde{q} , \tilde{p} (роль \tilde{q} , \tilde{p} играют в данном случае переменные q^0 , p^0). Если выразить $p_i(t, q, q^0)$ из первых n уравнений преобразования (26.40), и подставить $p_i(t, q, q^0)$ в последние n уравнений (или выразить $p_i^0(t, q, q^0)$ из первых n уравнений преобразования (29.1) и подставить $p_i^0(t, q, q^0)$ в последние n уравнений), то преобразования (29.1), (29.2) запишутся в свободном виде (28.7)

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t, q, q^0), \\ p_i^0 &= p_i^0(t, q, q^0), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (29.9)$$

Возможность перехода от (29.1) или (29.2) к (29.9), влечет возможность и обратного перехода: для возврата (29.9) \longrightarrow (29.2) требуется из первых n уравнений (29.9) выразить $q_i^0(t, q, p)$ и подставить в последние n уравнений; для перехода (29.9) \longrightarrow (29.1) требуется из последних n уравнений (29.9) выразить $q_i(t, q^0, p^0)$ и подставить в первые n уравнений. Возможность обратного перехода связана с выполнением для (29.9) одного из условий

$$\det \left\| \frac{\partial p_i(t, q, q^0)}{\partial q_k^0} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial p_i^0(t, q, q^0)}{\partial q_k} \right\| \neq 0. \quad (29.10)$$

Подстановка (29.9) в равенство (29.8) приводит к условию каноничности (28.11) в независимых переменных t, q, q^0 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i^0 dq_i^0 &= \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H(t, q, p) dt - \\ &- \frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial q_i^0} dq_i^0. \end{aligned} \quad (29.11)$$

Для производящей функции $W(t, q, q^0)$ в переменных t, q, q^0 принято следующее название.

Определение 29.1. Действие по Гамильтону (29.3), в котором переменная p^0 понимается как функция $p^0(t, q, q^0)$ (см. (29.9)), называется **главной функцией Гамильтона** $W(t, q, q^0)$.

Равенство (29.11) определяет следующую связь между главной функцией Гамильтона $W(t, q, q^0)$, гамильтонианом $H(t, q, p)$ и общим решением, представленным функциями (29.9):

$$\frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial q_i} = p_i(t, q, q^0), \quad (29.12)$$

$$\frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial q_i^0} = -p_i^0(t, q, q^0), \quad (29.13)$$

$$\frac{\partial W(t, q, q^0)}{\partial t} + H(t, q, p(t, q, q^0)) = 0. \quad (29.14)$$

Главная функция Гамильтона $W(t, q, q^0)$ при помощи равенств (29.12), (29.13) определяет каноническое преобразование в форме (29.9), а гарантия (29.10) возможности перехода к общему решению (29.1) или к полному набору первых интегралов (29.2) представляется с использованием $W(t, q, q^0)$ следующим образом

$$\det \left\| \frac{\partial^2 W(t, q, q^0)}{\partial q_i \partial q_k^0} \right\| \neq 0. \quad (29.15)$$

Подстановка (29.12) в (29.14)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}) = 0 \quad (29.16)$$

с учетом (29.15) дает возможность сделать вывод, что главная функция Гамильтона $W(t, q, q^0)$ есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (см. далее определения 31.1 и 31.2). Рассуждения, которые привели к главной функции Гамильтона $W(t, q, q^0)$ и к полному интегралу уравнения (29.16), основаны на предположении о том, что преобразование (29.1) — свободное (см. определение 28.2), т. е. возможен переход (29.1) \rightarrow (29.9). К сожалению, это не всегда так. Заведомо это не так при $t = t_0$:

$$q_i = q_i(t_0, q^0, p^0) = q_i^0, \quad p_i = p_i(t_0, q^0, p^0) = p_i^0,$$

а тождественное преобразование не является свободным. Аналогичная ситуация при $t = t_f$, где t_f определяет кинетический фокус, сопряженный с положением t_0 , q^0 (см. определение 23.1). В экзотическом, но не отвергаемом случае $H \equiv 0$ ($q_i(t) \equiv q_i^0$, $p_i(t) \equiv p_i^0$) главная функция Гамильтона $W(t, q, q^0)$ при любом значении t не определена.

Пример 29.1. Линейному осциллятору соответствуют функции Лагранжа и Гамильтона:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \quad H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

Общее решение (29.1) уравнений Гамильтона (27.1) ($t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} q &= q^0 \cos \omega t + p^0 \frac{\sin \omega t}{\omega}, \\ p &= -q^0 \omega \sin \omega t + p^0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (29.17)$$

— каноническое преобразование $q^0, p^0 \rightarrow q, p$. Подстановка $q(t)$ в действие по Гамильтону (29.3), интегрирование, приводящее к $W(t, q, q^0)$, и замена p^0 функцией $p^0(t, q, q^0)$, найденной из первого уравнения системы (29.17), приводит к главной функции Гамильтона

$$W(t, q, q^0) = \frac{1}{2}[q^2 + (q^0)^2] \omega \operatorname{ctg} \omega t - \frac{\omega q q^0}{\sin \omega t}, \quad (29.18)$$

которая не определена при $\omega t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в частности, при $t = t_0 = 0$. На интервалах, не содержащих значений $\omega t = k\pi$, функция (29.18) удовлетворяет условию (29.15), уравнению (29.16) и по ней с привлечением уравнений (29.12), (29.13) можно восстановить общее решение (29.1).

Построения, основанные на свободности преобразования (29.1), т. е. на возможности пользоваться независимыми переменными q, q^0 , привели к главной функции Гамильтона $W(t, q, q^0)$ — производящей функции унивалентного канонического преобразования (29.2). Аналогичные построения можно провести при выборе независимых переменных q, \tilde{p} (в данном случае q, p^0) — полусвободных преобразований по определению 28.3. Условие полусвободности (28.13) при значениях t близких к t_0 выполнено (в (29.2) при $t = t_0$: $q_i^0 = q_i^0(t_0, q, p) = q_i$, $p_i^0 = p_i^0(t_0, q, p) = p_i$)

$$\det \left\| \frac{\partial p_i^0(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0,$$

и преобразования (29.1), (29.2) представимы в форме (28.14)

$$\begin{aligned} q_i^0 &= q_i^0(t, q, p^0), \\ p_i &= p_i(t, q, p^0), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (29.19)$$

Замена условия каноничности (29.8) эквивалентным условием (см. (28.15))

$$-\sum_{i=1}^n q_i^0 dp_i^0 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt - d(W + \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0), \quad (29.20)$$

переход в (29.20) при помощи (29.19) к полусвободным переменным t, q, p^0 введение обозначения

$$V(t, q, p^0) = W(t, q^0(t, q, p^0), p^0) + \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0(t, q, p^0), \quad (29.21)$$

раскрытие дифференциала и приравнивание коэффициентов при дифференциалах от независимых переменных приводит к соотношениям, аналогичным (29.12), (29.13), (29.16):

$$\frac{\partial V(t, q, p^0)}{\partial q_i} = p_i(t, q, p^0), \quad (29.22)$$

$$\frac{\partial V(t, q, p^0)}{\partial p_i^0} = q_i^0(t, q, p^0), \quad (29.23)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, q, \frac{\partial V}{\partial q}) = 0. \quad (29.24)$$

Условия

$$\det \left\| \frac{\partial p_i(t, q, p^0)}{\partial p_k^0} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial q_i^0(t, q, p^0)}{\partial q_k} \right\| \neq 0$$

возможности возврата от равенств (29.19) к преобразованиям (27.2), (29.1) при t близким к t_0 выполнены и при помощи (29.22), (29.23) принимают следующий вид

$$\det \left\| \frac{\partial^2 V(t, q, p^0)}{\partial q_i \partial p_k^0} \right\| \neq 0. \quad (29.25)$$

Определение 29.2. Функцию $V(t, q, p^0)$, заданную формулой (29.21), назовем **полуглавной функцией Гамильтона**. Функция $W(t, q^0, p^0)$ в (29.21) — действие по Гамильтону (29.3), а зависимость $q^0(t, q, p^0)$ находится или из общего решения (29.1) вычислением q^0 из первых

n уравнений или вычислением p из последних n уравнений в (29.2) и подстановкой в первые n уравнений.

Как следует из (29.24), (29.25), определений 31.1, 31.2, полуглавная функция Гамильтона $V(t, q, p^0)$ также как и главная функция Гамильтона $W(t, q^0, p^0)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби.

Пример 29.2. Вычислим функцию $V(t, q, p^0)$ для линейного осциллятора из примера 29.1. Из первого уравнения в общем решении (29.17) находится зависимость $q^0(t, q, p^0)$, которая подставляется в формулу (29.22) (предполагается, что зависимость $W(t, q^0, p^0)$ в результате интегрирования в (29.3) получена). Итогом вычислений является полуглавная функция Гамильтона

$$V(t, q, p^0) = \frac{qp^0}{\cos \omega t} - \frac{1}{2} [(p^0)^2 + \omega^2 q^2] \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\omega} \quad (29.26)$$

— производящая функция унивалантного канонического полусвободного преобразования (29.2) ($-V$ — производящая функция преобразования (29.1)). Функция (29.25) определена на интервалах, не держащих значений

$$\omega t = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и по ней с привлечением уравнений (29.22), (29.23) можно восстановить общее решение (29.1).

Обе функции (29.18) и (29.25) для осциллятора определены не всюду, но некоторым преимуществом функции $V(t, q, p^0)$ по сравнению с функцией $W(t, q, q^0)$ является то, что для любой системы при $t = t_0$ функция $V(t, q, p^0)$ гарантировано определена, а функция $W(t, q, q^0)$ гарантировано неопределена. Для наглядного сравнения приведем функции V и W для свободной одномерной частицы (в (29.18) и (29.25) $\omega \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2t}(q - q^0)^2, \\ V &= qp^0 - \frac{t}{2}(p^0)^2. \end{aligned} \quad (29.27)$$

Обе функции удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби (см. (29.16))

и (29.24))

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 0, \quad (29.28)$$

и по ним восстанавливается общее решение: $q = q^0 + tp^0$, $p = p^0$.

Главная и полуглавная функции Гамильтона концентрируют информацию об общем решении, но для их вычисления требуется общее решение знать. Порочный круг будет преодолен в § 31.

§ 30. Следствия из основного критерия каноничности. Инволютивные системы

Приводятся с эскизными доказательствами два условия каноничности — следствия из основного критерия (теоремы 27.1)¹. Условия удобны для анализа — ответа на вопрос: является ли конкретное преобразование (27.12) каноническим? В формулировках и доказательствах участвует матрица порядка $2n$

$$J = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & 0 \end{array} \right\|, \quad (30.1)$$

где E — единичная матрица порядка n .

Теорема 30.1. Преобразование (27.12) является каноническим в том и только в том случае, если соответствующая преобразованию матрица Якоби (27.14), результат ее транспонирования M^T и матрица (30.1) при некотором числе $c \neq 0$ связаны соотношением

$$M^T J M = cJ. \quad (30.2)$$

□ Факт каноничности преобразования (27.12) эквивалентен интегрируемости при некотором числе $c \neq 0$ системы (28.2), а интегрируемость, в свою очередь, эквивалентна совпадению двумя способами вычисленных всевозможных производных второго порядка от

¹Подробности доказательств см.: Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике—2-е изд.—М.: Наука, 1966. 300 с. § 31, с.184. § 32, с. 187.

функции F . После переноса в одну часть результаты приравнивания имеют следующий вид,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial F}{\partial q_i} ;$$

$$A_{il} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_l} - \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_l} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_i} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_l} = \frac{\partial}{\partial p_l} \frac{\partial F}{\partial q_i} ;$$

$$B_{il} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_l} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_i} \right) = c \delta_{il}.$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_l} = \frac{\partial}{\partial p_l} \frac{\partial F}{\partial p_i} ;$$

$$C_{il} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_l} - \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_l} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_i} \right) = 0.$$

С учетом введенных обозначений A_{il} , B_{il} , C_{il} результат приравнивания можно записать в матричном виде:

$$\left\| \begin{array}{cc} \|A_{il}\| & \|-B_{il}\| \\ \|B_{il}\| & \|C_{il}\| \end{array} \right\| = c \left\| \begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & 0 \end{array} \right\| = cJ, \quad (30.3)$$

где J — матрица (30.1). Перемножение матриц в левой части доказываемого равенства (30.2) (см. (27.14) и (30.1)) приводит к такому же результату, как и в левой части условия интегрируемости (30.3), а значит совпадают и правые части. ■

Теорема 30.2. Преобразование (27.12) является каноническим в том и только в том случае, если при некотором числе $c \neq 0$ вычисление скобок Пуассона (20.3) от функций, определяющих преобразование (27.12), приводит к результату:

$$(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k) = 0, (\tilde{p}_i, \tilde{p}_k) = 0, (\tilde{q}_i, \tilde{p}_k) = c \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}. \quad (30.4)$$

□ Из определения (30.1) матрицы J непосредственно следуют формулы

$$J^{-1} = -J, \quad J^2 = - \left\| \begin{array}{cc} E & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|,$$

согласно которым справедлива следующая последовательность преобразований условия каноничности (30.2):

$$\begin{aligned} M^T J M J M^T &= c J J M^T = c J^2 M^T = -c M^T, \\ (M^T)^{-1} M^T J M J M^T &= -(M^T)^{-1} c M^T = -c, \\ J^{-1} J M J M^T &= -c J^{-1}, \\ M J M^T &= c J. \end{aligned} \tag{30.5}$$

Последнее равенство — цель преобразований. Перемножение матриц в левой части (30.5) с использованием обозначений для скобок Пуассона (20.3) и определения (30.1) матрицы J приводит к эквивалентной формуле

$$\left\| \begin{array}{cc} \|(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)\| & \|-(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)\| \\ \|(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)\| & \|(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)\| \end{array} \right\| = c \left\| \begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & 0 \end{array} \right\|,$$

которая эквивалентна доказываемым равенствам (30.4). ■

Отметим, что условия каноничности (30.2) и (30.4) удобны для анализа преобразования на каноничность, хотя бы потому, что не требуют дополнительных усилий на выбор независимых координат, но неудобны для синтеза: каждое из условий (30.2) и (30.4) — система из n^2 нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $\tilde{q}_i(t, q, p)$, $\tilde{p}_i(t, q, p)$. При дополнительных условиях для синтеза канонического преобразования достаточно знать n функций $\varphi_i(t, q, p)$ из набора $\tilde{q}_i(t, q, p)$, $\tilde{p}_i(t, q, p)$. Одно из условий — инволютивность.

Определение 30.1. Функции $\varphi_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, m}$, находятся в **инволюции** (система $\varphi_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, m}$, — **инволютивна**), если для скобок Пуассона выполняется

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{30.5}$$

Как следует из теоремы 30.2 (см. (30.4)), среди функций

$$\tilde{q}_i(t, q, p), \quad \tilde{p}_i(t, q, p),$$

задающих каноническое преобразование, достаточно много инволютивных систем. По такой системе, состоящей из n функционально независимых функций, строится каноническое преобразование. Один из вариантов выбора приводит к следующему результату.

Теорема 30.3. Пусть для инволютивной системы

$$\varphi_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}, \quad (30.6)$$

выполняется

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0. \quad (30.7)$$

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и вычисления интегралов, строится такое свободное унивалентное каноническое преобразование

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(t, q, p), \quad (30.8)$$

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q, p), \quad (30.9)$$

переход в котором к переменным \tilde{q}_i определяется функциями $\varphi_i(t, q, p)$.

□ Условие инволютивности (30.5) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}, \quad (30.10)$$

позволяющем менять местами индексы i и j . Условие (30.7) дает возможность алгебраически решить систему (30.8) относительно p_i :

$$p_i = \psi_i(t, q, \tilde{q}). \quad (30.11)$$

Подстановка (30.8) в (30.11) приводит к тождеству

$$p_i = \psi_i(t, q, \varphi(t, q, p)), \quad (30.12)$$

дифференцируя которое по p_l и q_j приходим к равенствам

$$\delta_{il} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l}, \quad (30.13)$$

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j}. \quad (30.14)$$

Запишем (30.14) иначе

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \quad (30.15)$$

и, преобразовывая правую часть, докажем формулу

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial q_i}. \quad (30.16)$$

В преобразованиях: левая часть равенства (30.13) заменяется правой; согласно (30.10) «перебрасываются» индексы α и k ; правая часть равенства (30.13) заменяется левой; левая часть (30.15) — правой.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} &= - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} = - \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \delta_{jl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} = \\ &= - \sum_{k,l,\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} = \sum_{k,l,\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_l} = \\ &= - \sum_{l,\alpha=1}^n \delta_{il} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_l} = - \sum_{l,\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Формула (30.16) есть условие интегрируемости системы

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \psi_i(t, q, \tilde{q}), \quad (30.17)$$

решение $S(t, q, \tilde{q})$ которой вследствие (30.16) находится квадратурой. Для $S(t, q, \tilde{q})$ с учетом (30.17), (30.13) и (30.7) выполняется

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \varphi_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\|^{-1} \neq 0, \quad (30.18)$$

т. е. функция $S(t, q, \tilde{q})$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к производящей функции свободного унивалентного канонического преобразования (см. (28.11)). Для построения преобразования нужно добавить к системе (30.17) систему (см. (28.10))

$$\tilde{p}_i = - \frac{\partial S(t, q, \tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{p}_i(t, q, \tilde{q}), \quad (30.19)$$

решить уравнение (30.11) относительно \tilde{q}_i , что приведет к (30.8), и подставить (30.8) в (30.19). Результат не однозначен: каждому решению $S_0(t, q, \tilde{q})$ системы (30.17) соответствует множество решений $S(t, q, \tilde{q}) = S_0(t, q, \tilde{q}) + \tilde{S}(t, \tilde{q})$ с произвольной функцией $\tilde{S}(t, \tilde{q})$. ■

Следствие. Пусть дополнительно к тому, что система (30.6) инволютивна и выполнено условие (30.7), функции $\varphi_i(t, q, p)$ — первые интегралы гамильтоновой системы, соответствующей функции Гамильтона $H(t, q, p)$. Тогда система

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial q_i} &= \psi_i(t, q, \tilde{q}), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(t, q, \psi(t, q, \tilde{q}))\end{aligned}\tag{30.20}$$

вполне интегрируема, и для любого ее решения $S(t, q, \tilde{q})$ выполняется условие (30.18) (функции $\psi_i(t, q, \tilde{q})$ введены в (30.11)).

□ Для первых интегралов (30.6) выполняется равенство (30.2)

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = 0.\tag{30.21}$$

Дифференцирование тождества (30.12) по t приводит к аналогичному (30.15) равенству

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}.$$

Подстановка $\partial \varphi_k / \partial t$ из (30.21) и учет тождеств (30.13) — (30.16) определяет соотношение

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_i}{\partial t} &= - \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} = \\ &= - \sum_{l=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \sum_{l=1}^n \delta_{il} \frac{\partial H}{\partial q_l} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial \psi_l}{\partial q_i},\end{aligned}$$

которое есть часть условий интегрируемости системы (30.20):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t}.$$

Прочие условия —

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}$$

— проверены в доказательстве теоремы: см. (30.16). Там же для любого решения системы (30.17) доказано условие (30.18), а решение системы (30.20) есть решение и системы (30.17). Аналогично менее жесткой системе (30.17) любому решению $S_0(t, q, \tilde{q})$ системы (30.20) соответствует множество решений $S(t, q, \tilde{q}) = S_0(t, q, \tilde{q}) + \tilde{S}(\tilde{q})$ с произвольной функцией $\tilde{S}(\tilde{q})$. ■

§ 31. Уравнение Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби традиционно выводится с привлечением свободных канонических преобразований — условие каноничности (27.15) в независимых переменных q, \tilde{q} (см. определение 28.2). Исходная функция Гамильтона $H(t, q, p)$ и функция $\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p})$, определяющая уравнения Гамильтона, в которые переходят в результате преобразования исходные уравнения, связаны соотношением (28.12). С привлечением уравнений (28.13) соотношение (28.12) можно записать так, что связь между гамильтонианами H и \tilde{H} задается только производящей функцией $S(t, q, \tilde{q})$ и валентностью $c \neq 0$:

$$\tilde{H}\left(t, \tilde{q}, -\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}\right) = c \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial q}\right). \quad (31.1)$$

К соотношению (31.1) можно относиться как к уравнению для нахождения S (при заданном числе c). Решение $S(t, q, \tilde{q})$, удовлетворяющее условию (28.14), определит преобразование (27.12), связывающее заданные гамильтоновы системы.

К уравнению Гамильтона-Якоби приводит следующий вопрос: найти такое свободное унивалантное ($c = 1$) каноническое преобразование ($S(t, q, \tilde{q}) = ?$), в результате которого система с функцией Гамильтона $H(t, q, p)$ перейдет в систему с функцией Гамильтона $\tilde{H} \equiv 0$. В переменных t, \tilde{q}, \tilde{p} уравнения Гамильтона примут вид

$$\dot{\tilde{q}}_i = 0, \quad \dot{\tilde{p}}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

и будут иметь общее решение

$$\tilde{q}_i = \alpha_i, \quad \tilde{p}_i = -\beta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (31.2)$$

Если вопрос о переходе к $\tilde{H} = 0$ решится положительно, то есть найдется функция $S(t, q, \tilde{q}) = S(t, q, \alpha)$, удовлетворяющая условию (28.14)

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \tilde{q})}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0, \quad (31.3)$$

то по $S(t, q, \alpha)$ при помощи (28.13) и (31.3) найдется общее решение в исходных переменных t, q, p (учтено переобозначение (31.2) и $c = 1$):

$$p_i = \frac{\partial S(t, q, \alpha)}{\partial q_i} = \psi_i(t, q, \alpha), \quad i = \overline{1, n}, \quad (31.4)$$

$$\beta_i = \frac{\partial S(t, q, \alpha)}{\partial \alpha_i} = f_i(t, q, \alpha), \quad i = \overline{1, n}. \quad (31.5)$$

Для нахождения общего решения

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha, \beta), \\ p_i &= p_i(t, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad i = \overline{1, n}, \quad (31.6)$$

нужно уравнения (31.5) разрешить относительно q_i и подставить $q_i(t, q, \alpha)$ в равенства (31.4). Условие (31.3) гарантирует также возможность решить (31.4) относительно α_i , что после подстановки $\alpha_i(t, q, p)$ в (31.5) приведет к полному набору первых интегралов

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(t, q, p), \\ \beta_i &= \beta_i(t, q, p), \end{aligned} \quad i = \overline{1, n}. \quad (31.7)$$

Одновременное существование соотношений (31.6) и (31.7), во-первых, обеспечивает функциональную независимость первых интегралов (31.7) (уравнения (31.7) решаются относительно q_i, p_i , во-вторых, подтверждает, что (31.6) — общее решение (любому набору начальных условий t_0, q^0, p^0 уравнения (31.7) ставят в соответствие набор произвольных постоянных α_i, β_i).

Уравнение для производящей функции S , реализующей переход

$$H(t, q, p) \longrightarrow \tilde{H} \equiv 0,$$

есть уравнение (31.1) при $c = 1, \tilde{H} = 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) = 0. \quad (31.8)$$

Определение 31.1. Уравнение (31.8) — уравнение Гамильтона–Якоби, соответствующее системе, определенной функцией Гамильтона $H(t, q, p)$.

Отметим, что, если вопрос о переходе $H(t, q, p) \longrightarrow \tilde{H} \equiv 0$ решать при помощи полусвободных унивалентных преобразований (см. определение 28.3), то подстановка в (28.11) $\tilde{H} = 0$, $c = 1$, $p_i = \partial\Phi/\partial q_i$ (см. (28.20)) приводит к такому же уравнению, как и уравнение Гамильтона–Якоби (31.8). Обозначение в этом случае $\tilde{q}_i = \beta_i$, $\tilde{p}_i = \alpha_i$ определит такое же как и (31.3), условие на решение Φ (см. (28.21)) и такие же уравнения (31.4), (31.5) для вычисления общего решения (31.6) или первых интегралов (31.7) (см. (28.20)).

Сопоставим уравнения Гамильтона–Якоби некоторым механическим системам, введенным в предыдущих параграфах.

Пример 31.1. Свободная частица:

$$H = \frac{1}{2}p^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 0. \quad (31.9)$$

Пример 31.2. Линейный осциллятор:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (31.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] = 0. \quad (31.11)$$

Пример 31.3. Движение в поле Всемирного тяготения (см. пример 30.1):

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\beta}{r}. \quad (31.12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\beta}{r} = 0. \quad (31.13)$$

Спектр решений уравнения в частных производных (31.8) простирается от частных решений до общего решения, зависящего от произвольных функций. Как было обсуждено, для нахождения движений системы требуется решение в следующем смысле.

Определение 31.2. Полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби (31.8) называется решение

$$S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

зависящее от произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и удовлетворяющее условию (31.3).

Полными интегралами уравнения Гамильтона–Якоби являются главная и полуглавная функции Гамильтона с отождествлением $q^0 \equiv \alpha$ для главной функции, $p^0 \equiv \alpha$ — для полуглавной (см. определения 29.1 и 29.2, уравнения 29.15, 29.16, 29.24, 29.25, а также в примерах 29.1 и 29.2 результаты вычислений (29.18), (29.26), (29.27)).

Название — полный интеграл — оправдано тем обстоятельством, что при переходе: функция Гамильтона \rightarrow уравнение Гамильтона–Якоби \rightarrow полный интеграл, — не происходит потери информации. По полному интегралу $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ вычисляются равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = g(t, q, \alpha), \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \psi_i(t, q, \alpha), \quad i = \overline{1, n}.$$

Последние n уравнений решаются относительно α_i :

$$\alpha_i = \alpha_i \left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q} \right),$$

что возможно в силу условия (31.3). Подстановка α_i в первое уравнение однозначно определит уравнение Гамильтона–Якоби (31.8).

Полезность уравнения Гамильтона–Якоби заключается в том, что один из его полных интегралов часто удается найти без громоздких вычислений и без применения общей теории интегрирования уравнений в частных производных. Один из приемов нахождения полных интегралов заключается в **методе разделения переменных**: вместо функции $S(t, q, \alpha)$ многих переменных отыскивается комбинация функций, каждая из которых является функцией одной переменной. Наиболее популярной является аддитивная комбинация

$$S = S_0(t) + S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n). \quad (31.14)$$

Пример 31.4. Применение такой комбинации к уравнению (31.9) разделит переменные t и q

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dS_1(q)}{dq} \right)^2 = -\frac{1}{2} \alpha^2.$$

Очевидные решения

$$S_0(t) = -\frac{1}{2} t \alpha^2, \quad S_1(q) = \alpha q$$

приводят к полному интегралу

$$S = S_0 + S_1 = -\frac{1}{2} t \alpha^2 + \alpha q. \quad (31.15)$$

Произвольная постоянная α введена, чтобы удовлетворить определению 31.2 полного интеграла. Полный интеграл (31.15) с точностью до обозначений для произвольной постоянной совпадает с полуглавной функцией Гамильтона (29.28). Главная функция Гамильтона (29.27) — еще один полный интеграл уравнения (31.9). Отметим две характерные особенности, проявившиеся в рассмотренном примере: при аддитивном разделении переменных (31.14) для циклической координаты q_k ($\partial H / \partial q_k = 0$) можно положить $S_k(q_k) = \alpha q_k$, а в случае обобщенно-консервативной системы ($\partial H / \partial t = 0$) — положить $S_0(t) = \alpha_0 t$. Подстановка полного интеграла (31.15) в формулы (31.4), (31.5):

$$p = \alpha, \quad \beta = -t + q,$$

приводит и к общему решению (31.6)

$$q = t + \beta, \quad p = \alpha$$

и к первым интегралам (31.7)

$$\alpha = p, \quad \beta = q - t.$$

Пример 31.5. Подстановка (31.14) в (31.11), как и в предыдущем примере, разделит переменные —

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dS_1(q)}{dq} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] = -\frac{dS_0(t)}{dt} = \alpha \quad (31.16)$$

— и приведет к полному интегралу

$$\begin{aligned} S &= S_0(t) + S_1(q) = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} dq = \\ &= -\alpha t + \frac{1}{2} q \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} + \frac{2\alpha}{\omega^2} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (31.17)$$

Два других полных интеграла приведены в § 29: главная (29.18) и полуглавная (29.26) функции Гамильтона.

Подстановка полного интеграла (31.17) в формулы (31.4), (31.5):

$$p = \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}, \quad \beta = -t + \int \frac{dq}{\sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}} = -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}$$

— приводит к общему решению (31.6)

$$q = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \sin \omega(t + \beta),$$

$$p = \sqrt{2\alpha} \cos \omega(t + \beta)$$

и к первым интегралам

$$\alpha = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (= H),$$

$$\begin{aligned} \beta &= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{p^2 + \omega^2 q^2}} = \\ &= -t + \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega q}{p}. \end{aligned}$$

Пример 31.6. Пример линейного осциллятора с функцией Гамильтона (31.10) иллюстрирует, как при помощи уравнения Гамильтона–Якоби находить движение для целого класса обобщенно–консервативных систем ($H = H(q,p)$) с одной степенью свободы при дополнительном условии

$$\partial H / \partial p \neq 0,$$

которое дает возможность равенство

$$H(q,p) = h \quad (31.18)$$

разрешить относительно p

$$p = f(q, h). \quad (31.19)$$

Разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона–Якоби (31.8) приведут к аналогичному (31.16) уравнению

$$H \left(q, \frac{dS_1(q)}{dq} \right) = -\frac{dS_0(t)}{dt} = h$$

и к аналогичному (31.17) полному интегралу

$$S = -ht + \int f(q, h) dq$$

(см. (31.19)), при помощи которого вычисляется общее решение

$$\begin{aligned} q &= q(t, h, \beta), \\ p &= p(t, h, \beta) \end{aligned}$$

и дополнительный к (31.18) первый интеграл $w(t, q, p) = \beta$.

Пример 31.7. Разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона–Якоби (31.13) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dS_0(t)}{dt} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS_3(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{dS_2(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{dS_1(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\beta}{r} = 0. \end{aligned} \quad (31.20)$$

Система является обобщенно-консервативной и имеет циклическую координату ψ , поэтому положим $S_0 = \alpha_0 t$, $S_1 = \alpha_1 \psi$. После подстановки в уравнение, получим в квадратных скобках выражение, зависящее только от θ . Распорядимся выбором $S_2(\theta)$ так, чтобы это выражение равнялось α_2 . Из уравнения с разделяющимися переменными находим

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}} d\theta.$$

После подстановки S_0 , S_1 , S_2 , получаем для $S_3(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и решением

$$S_3(r) = \int \sqrt{2m \left(\frac{\beta}{r} - \alpha_0 \right) - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr.$$

Функция

$$S(t, \psi, \theta, r, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 S_i = \alpha_0 t + \alpha_1 \psi + \\ + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int \sqrt{2m \left(\frac{\beta}{r} - \alpha_0 \right) - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr$$

по построению есть решение уравнения (31.13), нетрудно убедиться, что требование (31.3), предъявляемое к полному интегралу, также выполнено. Полный интеграл S при помощи (31.4) определит в квадратурах всю совокупность движений в поле Всемирного тяготения и дополнительные к H , p_φ, z (см. (20.6) — (20.8)) три первых интеграла.

Пример 31.8. Рассмотрим систему с более общей, по сравнению с (31.12) функцией Гамильтона (см. (20.13))

$$H(F_2(F_1(q_1, p_1), q_2, p_2), p_3, q_4, p_4). \quad (31.21)$$

В примере 20.2 приведены четыре первых интеграла (20.14) соответствующей гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} F_1(q_1, p_1) &= \alpha_1, \\ F_2(\alpha_1, q_2, p_2) &= \alpha_2, \\ p_3 &= \alpha_3, \\ H(\alpha_2, \alpha_3, q_4, p_4) &= \alpha_4. \end{aligned} \quad (31.22)$$

Предполагается, что равенства (31.22) разрешимы относительно обобщенных импульсов

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(\alpha_1, q_1), \\ p_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, q_2), \\ p_3 &= \alpha_3, \\ p_4 &= f_4(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, q_4). \end{aligned} \quad (31.23)$$

Аналогично переходу (31.13) \longrightarrow (31.20), разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона–Якоби, соответствующем функции (31.21), приводит к результату

$$\begin{aligned} \frac{dS_0(t)}{dt} + H \left(F_2 \left(F_1 \left(q_1, \frac{dS_1(q_1)}{dq_1} \right), q_2, \frac{dS_2(q_2)}{dq_2} \right), \right. \\ \left. \frac{dS_3(q_3)}{dq_3}, q_4, \frac{dS_4(q_4)}{dq_4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (31.24)$$

Распорядимся выбором функций $S_1(q_1), \dots, S_4(q_4)$ так, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} F_1 \left(q_1, \frac{dS_1(q_1)}{dq_1} \right) &= \alpha_1, \\ F_2 \left(\alpha_1, q_2, \frac{dS_2(q_2)}{dq_2} \right) &= \alpha_2, \\ \frac{dS_3(q_3)}{dq_3} &= \alpha_3, \\ H \left(\alpha_2, \alpha_3, q_4, \frac{dS_4(q_4)}{dq_4} \right) &= \alpha_4. \end{aligned} \quad (31.25)$$

С учетом обозначений (31.23) уравнения (31.25) эквивалентны уравнениям с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(q_1)}{dq_1} &= f_1(\alpha_1, q_1), \\ \frac{dS_2(q_2)}{dq_2} &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, q_2), \\ \frac{dS_3(q_3)}{dq_3} &= \alpha_3, \\ \frac{dS_4(q_4)}{dq_4} &= f_4(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, q_4). \end{aligned} \quad (31.26)$$

Подстановка (31.25) в (31.24) приводит к еще одному уравнению

$$\frac{dS_0(t)}{dt} + \alpha_4 = 0,$$

которое в совокупности с (31.26) определяет полный интеграл

$$S(t, q_1, \dots, q_4, \alpha_1, \dots, \alpha_4) = -\alpha_4 t + \int f_1(\alpha_1, q_1) dq_1 + \int f_2(\alpha_1, \alpha_2, q_2) dq_2 + \alpha_3 q_3 + \int f_4(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, q_4) dq_4. \quad (31.27)$$

Функция (31.27) является решением уравнения (31.24) по построению, а условие (31.3):

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_4}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \alpha_4} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial f_4}{\partial \alpha_4} \neq 0,$$

— выполняется по предположению о возможности перехода (20.14) \rightarrow (31.23) и обратно. Уравнения (31.4) и (31.5) определяют общее решение (31.6) и восемь первых интегралов (31.7). Четыре из них — результат решения относительно α_i уравнений (31.4) — совпадут с (20.14). Как отмечалось в конце § 20, удвоение числа первых интегралов — следствие инволютивности функций (20.14). Сформулируем общий результат.

Теорема 31.1 (Ж..Лиувилль). Пусть для первых интегралов

$$w_i(t, q, p) = \alpha_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (31.28)$$

(n — количество координат q и количество импульсов p) гамильтоновой системы, определенной функцией $H(t, q, p)$, выполняется

а) $(w_i, w_k) = 0, \quad i, k = \overline{1, n}$, — интегралы находятся в инволюции (см. определение 30.1);

б) уравнения (31.28) разрешимы относительно p :

$$p_i = \psi_i(t, q, \alpha), \quad i = \overline{1, n}. \quad (31.29)$$

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и квадратур, по функциям $w_i(t, q, p), \quad i = \overline{1, n}$, вычисляется полный интеграл $S(t, q, \alpha)$

соответствующего H уравнения Гамильтона–Якоби (31.8) и дополнительные к (31.28) первые интегралы $w_{n+i}(t, q, p)$, $i = \overline{1, n}$.

□ Как было доказано в следствии из теоремы 30.2, система

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \psi_i(t, q, \alpha), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(t, q, \psi(t, q, \alpha)) \end{aligned} \quad (31.30)$$

(ψ_i — функции из (31.29)) вполне интегрируема, и для любого решения $S(t, q, \alpha)$ выполняется условие (31.3). Подстановка ψ_i из первых n уравнений системы (31.30) в последнее уравнение приводит к выводу, что любое решение $S(t, q, \alpha)$ системы (31.30) есть полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. При помощи уравнений (31.4), (31.5) (уравнения (31.4) совпадают с первыми n уравнениями из (31.30)) вычисляются $2n$ функционально независимых первых интегралов (первые n интегралов совпадают с (31.28)). Система (31.30) эквивалентна уравнению в полных дифференциалах

$$dS(t, q, \alpha) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t, q, \alpha) dq_i - H(t, q, \psi(t, q, \alpha)) dt,$$

которое, как известно³, интегрируется в квадратурах. Одно из решений

$$\begin{aligned} S(t, q, \alpha) = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \psi_i(ts, qs, \alpha) dq_i - \right. \\ \left. - tH(ts, qs, \psi(ts, qs, \alpha)) \right\} ds. \blacksquare \end{aligned} \quad (31.31)$$

Утверждение теоремы 31.1 открывает параллельный путь, минуя уравнение Гамильтона–Якоби, вычисления полного интеграла (см. (31.31)) и общего решения (31.6) уравнений Гамильтона. Приведенные выше примеры показывают, что удовлетворяющие условиям теоремы 31.1 первые интегралы «поставляют» теоремы 20.2, 20.3, 20.5 (циклическая и отделимая переменные, обобщенно–консервативные системы). Не исключено, что существуют другие «честные» примеры систем, для которых легко вычисляются или «угадываются» первые интегралы (31.28) в инволюции, разрешимые относительно обобщенных импульсов. К «нечестным» примерам приводит следующий

³Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 420 с.

способ. По известному полному интегралу, например, по главной или полуглавной функциям Гамильтона, (см. определения 29.1, 29.2), вычисляются первые интегралы (31.7). Функции $\alpha_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, n}$, в (31.7) удовлетворяют всем условиям теоремы 31.1. Условие а) справедливо в силу теоремы 30.2: преобразование (31.7) каноническое, переменные α_i , β_i играют роль \tilde{q}_i , \tilde{p}_i . Условие б) выполнено по построению функций $\alpha_i(t, q, p)$: они есть результат решения уравнений (31.4) относительно α_i , функции (31.4) (они же (31.29)) результат обратной операции — решения уравнений $\alpha_i = \alpha_i(t, q, p)$ относительно p_i .

Следующий пример показывает, что аддитивная замена переменных (31.14) в случае обобщенно-консервативной системы первого порядка не всегда приводит к успеху (ср. пример 31.6).

Пример 31.9. В результате канонического преобразования

$$\tilde{q} = p, \tilde{p} = -q$$

свободной частице ставится в соответствие функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}q^2$$

и уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 = 0.$$

Разделение переменных (31.14)

$$\frac{dS_0(t)}{dt} + \frac{1}{2}q^2 = 0$$

к полному интегралу не приводит. Другой вариант разделения переменных $S = S_0(t)S_1(q)$ определяет уравнение

$$\frac{dS_0(t)}{dt} S_1(q) + \frac{1}{2}q^2 = 0$$

и очевидным образом решает задачу:

$$S_1 = \frac{1}{2}q^2, S_0 = \alpha - t, S = \frac{1}{2}q^2(\alpha - t);$$

$$\frac{1}{2}q^2 = \beta, \quad p = q(\alpha - t);$$

$$q = \sqrt{2\beta}, \quad p = \sqrt{2\beta}(\alpha - t).$$

Разделение переменных — в той или иной форме — в уравнении Гамильтона–Якоби не является универсальным методом нахождения движения, но, как показывают примеры 31.6, 31.8, заслуживает внимания, хотя бы за то, что обслуживает достаточно обширные классы систем.

В следующем примере кроме разделения переменных требуется некоторая «смекалистость».

Пример 31.10. Системе с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p_1 + q_2}{p_2 + q_1} \tag{31.32}$$

соответствует уравнение Гамильтона–Якоби (проведено разделение переменных (31.14))

$$\frac{dS_0(t)}{dt} + \left(\frac{dS_1(q_1)}{dq_1} + q_2 \right) / \left(\frac{dS_2(q_2)}{dq_2} + q_1 \right) = 0.$$

Выбор $S_0 = -ht$ и освобождение от знаменателя делит переменные

$$\frac{dS_1(q_1)}{dq_1} - hq_1 = h \frac{dS_2(q_2)}{dq_2} - q_2.$$

Приравнивание левой и правой части постоянной α и интегрирование определяет полный интеграл

$$S = -ht + \frac{1}{2h}(\alpha + hq_1)^2 + \frac{1}{2h}(\alpha + q_2)^2.$$

Подстановка S в уравнения (31.4) и решение относительно α и h приводит к двум первым интегралам в инволюции: один из них $H = h$, где H — функция Гамильтона (31.32), другой —

$$\frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{p_2 + q_1} = \alpha. \tag{31.33}$$

Уравнения (31.5) после подстановки вместо h функции (31.32) определяют два других первых интеграла

$$\begin{aligned}hp_1 + p_2 &= \beta_1, \\ -t + \frac{1}{h}p_1q_1 - \frac{1}{2h^2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 &= \beta_2.\end{aligned}\tag{31.34}$$

Функции (31.34) — еще одна пара первых интегралов в инволюции. Равенства (31.32) — (31.34) неявно определяют движение $q_i(t)$, $p_i(t)$.

Учебное издание

Геннадий Николаевич Яковенко

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Устойчивость, Колебания,
Гамильтонова Механика

Редактор *И.А. Волкова*
Художник *А.И. Лискович*

Подписано в печать . Формат 60x90 1/16. Бумага
писчая N1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 10,00. Уч.-изд.л. 10.00.
Тираж экз. Заказ N

Московский физико-технический институт Лаборатория обработ-
ки учебной и научной информации 141700, Моск. обл., г. Долгопрудный,
Институтский пер. 9