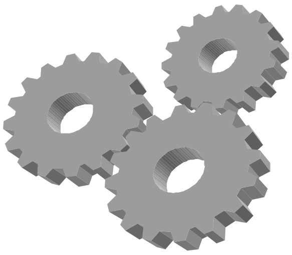
СЕМИНАРЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ.

Преподаватель: Семендяев Сергей Вячеславович.



СЕМИНАР №1.

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ.

Указатель литературы.

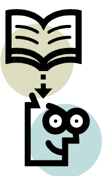
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §9, с.58-60

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... -

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... -

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... §7, 10 с.51-55, 66-70

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... -



Рассмотрим **стационарно заданные системы** ($\partial\vec{r}\left(t,q,\dot{q}\right)/\partial t=0$): консервативные, гироскопические, диссипативные.

Производная полной механической энергии:

$\dfrac{dE}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i+\dfrac{\partial\Pi\left(t,q\right)}{\partial t}$, где $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i$ - мощность непотенциальных сил.

Стационарно заданная система называется **консервативной**, если для нее выполнены условия:

А) потенциальная энергия не зависит явно от времени ($\partial\Pi/\partial t=0$);

Б) все силы потенциальны ($Q_i^*=0$).

У консервативной системы сохраняется полная энергия: $E=T+\Pi=const$.

Стационарная заданная система называется **гироскопической**, если для нее выполнены условия:

А) потенциальная энергия не зависит явно от времени ($\partial\Pi/\partial t=0$);

Б) мощность непотенциальных сил равна нулю, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i=0$.

У гироскопической системы сохраняется полная энергия. К таким системам относится гироскоп, совершающий регулярную прецессию.

Стационарно заданная система называется **диссипативной**, если для нее выполнены условия:

А) потенциальная энергия не зависит явно от времени ($\partial\Pi/\partial t=0$);

Б) для мощности непотенциальных сил выполняется $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i\le 0$.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i<0$ при $\left|\dot{q}\right|\ne 0$, то система называется **определенно-диссипативной**.

Полная механическая энергия во время движения диссипативной системы рассеивается (диссипирует).

Некоторые непотенциальные силы Q_i^* линейно зависят от обобщенных скоростей, т.е.

$$Q_i^*=-\sum_{l=1}^{n}b_{il}\left(t,q\right)\dot{q}_l=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i},$$

где $\left\|b_{il}\right\|$-симметричная матрица, Φ-квадратичная форма:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} b_{il}(t,q)\dot{q}_i\dot{q}_l \ .$$

При этом $\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -2\Phi$.

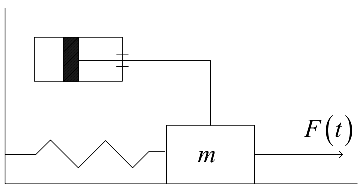
В случае диссипативной системы $\Phi = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,l=1}^{n} b_{il}(t,q)\dot{q}_i\dot{q}_l$ называется **функцией Релея** и должна быть неотрицательной: $\Phi \geq 0$; для определенно-диссипативной – положительно-определенной: $\{|\dot{q}| \neq 0\} \Rightarrow \{\Phi > 0\}$.

При наличии диссипативных сил вида $Q_i^* = -\sum\limits_{l=1}^{n} b_{il}(t,q)\dot{q}_l = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$ уравнения Лагранжа можно записать в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \tilde{Q}_i ,$$

где $\tilde{Q}_i$ - обобщенные силы, соответствующие непотенциальным и недиссипативным силам.

Рассмотрим механическую систему.

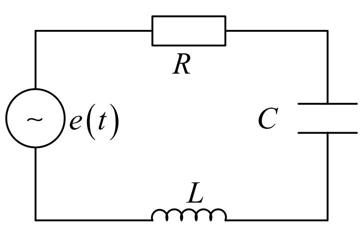


$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \Pi = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta\dot{x}^2, \tilde{Q} = F(t)$$

Подставив в уравнение Лагранжа, получим $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t)$.

Рассмотрим электрическую схему.



По закону Кирхгофа падение напряжений $u_R = RI = R\dot{q}$,

$u_C = \frac{1}{C} q, u_L = L\dot{I} = L\ddot{q}$

приравняем ЭДС $e(t)$:

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = e(t)$.

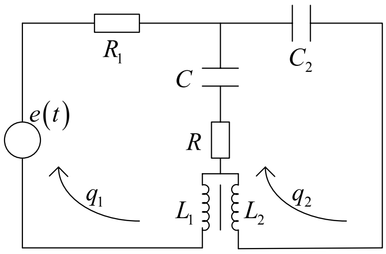
С математической точки зрения уравнения механической и электрической систем эквивалентны. Поэтому можно провести **электромеханические аналогии.**

					T	Π	Φ	$\tilde{Q}$
m	β	k	x	$\dot{x}$	$\frac{1}{2} m\dot{x}^2$	$\frac{1}{2} kx^2$	$\frac{1}{2} \beta\dot{x}^2$	$F(t)$
L	R	$\frac{1}{C}$	q	$I = \dot{q}$	$\frac{1}{2} L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}\frac{1}{C} q^2$	$\frac{1}{2} R\dot{q}^2$	$e(t)$

Замечание. Потенциальные силы, потенциальная энергия которых **не пропорциональна квадрату обобщенной координаты**, следует **приписывать не к потенциальной энергии, а к обобщенным силам**, чтобы не нарушать строгость электромеханической аналогии.

Число степеней свободы электрической цепи $N^{эл}$ равно числу независимых контуров или минимальному числу разрывов, после которых перестает течь ток.

Пример.



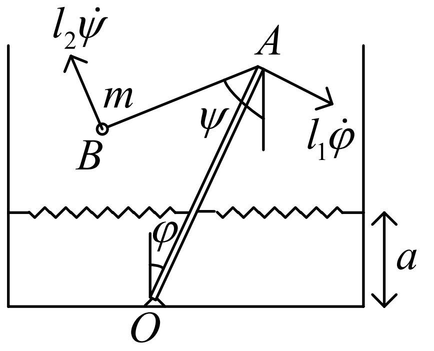
$$T = \frac{1}{2}\left(L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + 2M\dot{q}_1\dot{q}_2 \right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{C} \right)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} R_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2$$

$$\tilde{Q}_1 = e(t), \tilde{Q}_2 = 0$$

Задача С.13.19.



Дано: $m, M, l_1, l_2, a, k, \vec{F}_B = -\beta\vec{\upsilon}_B$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{6}Ml_1^2\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\begin{bmatrix}\left(l_2\dot\psi\sin(\psi-\varphi)\right)^2 + \\ +\left(l_2\dot\psi\cos(\psi-\varphi) - l_1\dot\varphi\right)^2\end{bmatrix} =$$

$$= при\_малых\_углах\_\varphi,\psi:\ \psi\text{-}\varphi \approx 0,\ \sin(\psi\text{-}\varphi) \approx 0,\ \cos(\psi\text{-}\varphi) \approx 1 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{6}Ml_1^2\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\begin{bmatrix} l_2^2\dot\psi^2 + l_1^2\dot\varphi^2 - \\ -2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\underbrace{\cos(\psi-\varphi)}_{\to 1}\end{bmatrix} =$$

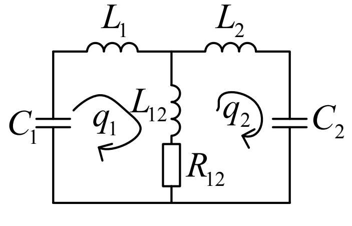
$$= \frac{1}{6}Ml_1^2\dot\varphi^2 + \frac{m}{2}\left(l_2\dot\psi - l_1\dot\varphi\right)^2$$

Потенциальная энергия: $\Pi = \frac{1}{2}Mgl_1\underbrace{\cos\varphi}_{1-\frac{\varphi^2}{2}} + mg\left(l_1\underbrace{\cos\varphi}_{1-\frac{\varphi^2}{2}} - l_2\underbrace{\cos\psi}_{1-\frac{\psi^2}{2}}\right) + \frac{2ka^2\varphi^2}{2}$

Функция Релея: $\Phi = \frac{1}{2}\beta\upsilon^2 = \frac{1}{2}\beta\left(l_2\dot\psi - l_1\dot\varphi\right)^2$

Обобщенные непотенциальные недиссипативные силы равны нулю.

Рассмотрение функций кинетической и потенциальной энергии, а также функции Релея позволяет сделать вывод о электрической аналогии этой механической системы.

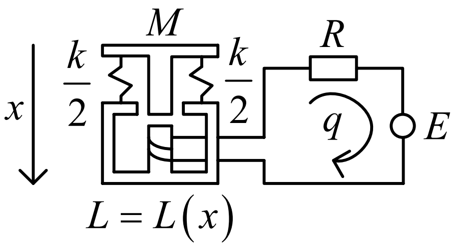


Постулат Максвелла. Состояние электромеханической системы с количеством степеней свободы $N = N_{мех} + N_{эл}$ определяется уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \tilde{Q}_i,$$ в которые подставлены

функции $T = T_{мех} + T_{эл}, \Pi = \Pi_{мех} + \Pi_{эл}, \Phi = \Phi_{мех} + \Phi_{эл}, \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_{i\,мех} + \tilde{Q}_{i\,эл}$.

Пример.



Катушка индуктивности с железным сердечником.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)\dot{q}^2}{2}$$

Потенциальная энергия $\Pi = \dfrac{kx^2}{2}$.

Функция Релея: $\Phi = \dfrac{R\dot{q}^2}{2}$.

Обобщенные силы: $\tilde{Q}_x = mg, \tilde{Q}_q = E$.

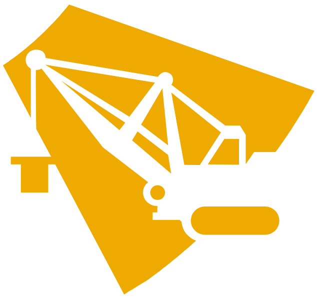
Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \tilde{Q}_i,$$ где $i = x, q$.

$$\begin{cases} M\ddot{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dL(x)}{dx}\dot{q}^2 = -kx + mg \\ L(x)\ddot{q} + \dfrac{dL(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt}\dot{q} = -R\dot{q} + E \end{cases}$$

здесь мы учли, что $\dfrac{dL(x)}{dt} = \dfrac{dL(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt}$.

СЕМИНАР №2.



РАВНОВЕСИЕ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ.

Указатель литературы.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §4, с.28-37

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... Глава 6, §1-3, с.212-217

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... (не обязательно) Глава IV, с.114-143

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... Глава 2, с.71-83

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... Глава 9, §34-36, с.153-159

Положение равновесия – это положение, в котором система может находиться сколь угодно долго, будучи приведена туда с нулевыми скоростями.

Необходимое и достаточное условия равновесия даются **принципом виртуальных перемещений**.

Для того чтобы положение системы с идеальными связями было положением равновесия необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю элементарная работа всех активных сил на виртуальных перемещениях.

Принцип виртуальных перемещений формулируется для <u>идеальных</u> связей. **Связи называются идеальными, если сумма работ реакций этих связей на любых**

виртуальных перемещениях всегда равна нулю $\Rightarrow$ реакции связей не войдут в уравнения Лагранжа.

Для систем с не идеальными, но со склерономными связями, имеется **принцип возможных перемещений**.

Для того чтобы положение системы с склерономными связями было положением равновесия необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю элементарная работа всех приложенных сил на возможных перемещениях.

$$\boxed{\delta A = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum Q_i dq_i = 0}$$

В принципе возможных перемещений дается формулировка для приложенных сил. К числу приложенных сил относятся активные силы и пассивные силы, т.е. те, которые являются следствием действия активных. Например, сила реакции опоры – следствие действия веса на опору. Силы трения покоя и скольжения – следствие действия внешней силы по касательной к плоскости контакта тела с шероховатой поверхностью. Пассивные силы, совершающие работу, относят к реакциям неидеальных связей.

Сведем различия формулировок в таблицу:

Принцип:	виртуальных перемещений	возможных перемещений
Системы с связями:	идеальными	склерономными
Работа сил:	активных	приложенных (активных + пассивных)
На перемещениях:	виртуальных	возможных

Эквивалентная формулировка этого принципа через обобщенные силы предполагает равенство нулю каждой обобщенной силы Q_i.

$$\sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum Q_i dq_i = 0 .$$

Обобщенные координаты независимы $\Rightarrow$ можно изменять одну, фиксируя другие.

$$\delta A = \sum Q_i dq_i = 0, \forall q_i \Rightarrow Q_i = 0$$

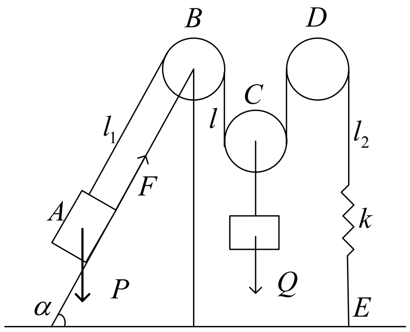
Условие равновесия $\Leftrightarrow$ **необходимо и достаточно** $\boxed{Q_i = 0, \forall i}$.

Из этого принципа равновесия следуют, в частности, условия равновесия геометрической статики для твердого тела: $\vec{R}=\vec{0}, \vec{M}_O=\vec{0}$.

$$\delta A=\sum \vec{F}_k \vec{\upsilon}_k dt=\sum \vec{F}_k\left(\vec{\upsilon}_O+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_k\right)dt=\vec{R}\vec{\upsilon}_O dt+\vec{\omega}\vec{M}_O dt$$

Выбор полюса О и угловой скорости $\vec{\omega}$ носит произвольный характер. Поэтому для свободного твердого тела $\vec{R}=\vec{0}, \vec{M}_O=\vec{0}$. А для несвободного, т.е. если есть связи, необходимо учесть действие связей. Это можно сделать с помощью **принципа освобождаемости от связей: несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи заменить их реакциями.**

Задача:



□ Две степени свободы, за обобщенные координаты возьмем l_1 и l_2.

Т.к. сила трения F может совершить работу, реакция соответствующей ей связи не идеальна. Поэтому *здесь работает принцип возможных перемещений*, а не идеальных.

$$\delta A=P\sin\alpha dl_1+Qdl-Fdl_1+k\Delta s dl_2$$

Нить нерастяжима: $l_1+l_2+2l=const$ (уравнение связи)

$$\Rightarrow dl_1+dl_2+2dl=0\rightarrow dl=-\frac{dl_1+dl_2}{2}$$

$$\underbrace{\left(P\sin\alpha-\frac{Q}{2}-F\right)}_{Q_1}dl_1+\underbrace{\left(-\frac{Q}{2}+k\Delta s\right)}_{Q_2}dl_2=0$$

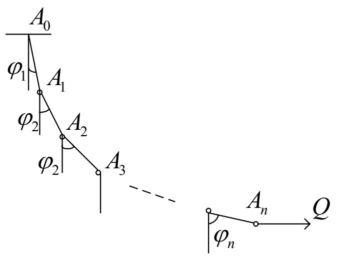
Отсюда Q_1 и Q_2 - обобщенные силы

Условие равновесия $\rightarrow$ необходимо и достаточно

$$Q_i=0, \forall i. \Rightarrow F=P\sin\alpha-\frac{Q}{2}, \Delta s=\frac{Q}{2k}. \blacksquare$$

Если все Q_i потенциальны, условие равновесия: $\boxed{Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0}$**.**

<u>Задача</u> С.14.6.



Дано $\vec{Q} = \overrightarrow{const}$, m. Найти φ_i.

$\square -d\Pi_Q = \delta A_Q = Qdx_n$,

$$x_n = l\sum_{k=1}^{n} \sin\varphi_k ,$$

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_Q = -mgl\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 + (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + \\ + (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3) + \ldots \\ \ldots + (\cos\varphi_1 + \ldots + \cos\varphi_n) \end{pmatrix} - Qx_n ,$$

$$\Pi = -mgl\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos\varphi_k - Ql\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k ,$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} = -mgl(n-k+1)\sin\varphi_k + Ql\cos\varphi_k = 0,$$

$$\Rightarrow tg\varphi_k = \frac{Q}{mg(n-k+1)}$$

Отсюда находим углы положения равновесия. ■

Обратите внимание на примеры в [3] на стр. 74-80.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ.

Указатель литературы.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §33-34, с.165-174

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... Глава 6, §5, (пункты 1,4) с.222-242

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... Глава XIV, §1, с.507-518

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... Глава 3, с.83-97

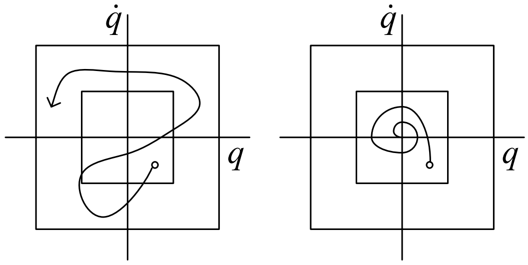
Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... Глава 9, §38, с.165-171

Сейчас мы будем говорить об устойчивости консервативных систем.

Положение равновесия называют устойчивым, если

$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta(\varepsilon) \succ 0 : \left|q_i(0)\right| \prec \delta, \left|q_i'(0)\right| \prec \delta \Rightarrow \left|q_i(t)\right| \prec \varepsilon, \left|q_i'(t)\right| \prec \varepsilon$ {Замечание. При этом мы предполагаем, что обобщенные координаты выбраны так, что соответствуют положению равновесия $(q, \dot{q}) = (0,0)$, где $q = \{q_1, ..., q_n\}$ }

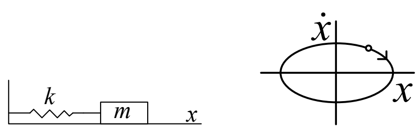
Если, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} q_i'(t) = 0$**, то положение равновесия называется асимптотически устойчивым.**



Устойчивость - траектория движения на фазовой плоскости $(q, \dot{q})$ не выйдет за пределы ε-окрестности, если началась в δ-окрестности.

Асимптотическая устойчивость - если $(q, \dot{q})$ стремится к нулю.

<u>Пример.</u>



Полная механическая энергия груза на пружинке:

$E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = const = c$. В фазовой плоскости $(q, \dot{q})$ она дает уравнение эллипса.

Есть устойчивость согласно определению $\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0 : ...$.

Нет асимптотической устойчивости, т.к. с эллипса «слезть» нельзя.

Для исследования устойчивости <u>консервативных</u> систем есть несколько теорем.

<u>Достаточные условия устойчивости</u> дает теорема Лагранжа.

<u>Теорема Лагранжа (или Лагранжа-Дирихле)</u>. Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия Π **имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.**

(Замечание. Эта теорема является <u>достаточным условием устойчивого равновесия</u>. Невыполнение условий т. Лагранжа не значит еще, что нет устойчивости).

Необходимым условием экстремума функции являются равенства: $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -Q_i = 0, \forall i$

<u>Достаточные условия неустойчивости</u> дают две теоремы Ляпунова и теорема Четаева.

<u>1 теорема Ляпунова.</u> Если в положении равновесия потенциальная энергия Π консервативной системы не имеет минимума и это устанавливается из рассмотрения членов 2-го порядка в разложении Π, то такое положение равновесия неустойчиво.

<u>2 теорема Ляпунова</u>. Если в положении равновесия консервативной системы Π имеет максимум и это устанавливается из членов наинизшего порядка в разложении Π, то такое положение равновесия неустойчиво.

Функция Π начинается на самом деле с Π_2:

$$\Pi = \overbrace{\Pi_o}^{=0} + \sum \overbrace{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)}^{=0} q_i + \frac{1}{2}\sum \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right) q_i q_k + \dots$$

Π_0 - аддитивная константа, которую можно приравнять нулю. $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, поскольку рассматриваем равновесие.

Если квадратичная форма потенциальной энергии положительно определена в каком-либо положении равновесия ($\Pi_2 > 0$), то в этом положении потенциальная энергия имеет строгий изолированный минимум, и следовательно, устойчивое положение равновесия по теореме Лагранжа. Условие положительной определенности квадратичной формы дает **критерий Сильвестра**.

По критерию Сильвестра рассматривается матрица:

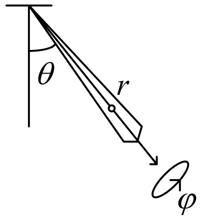
$$\left\| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \end{matrix} \right\|$$

в которой для того, чтобы $\Pi_2 > 0$ должно выполняться $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n = \Delta > 0$.

<u>Теорема Четаева.</u> Если Π консервативной системы является однородной функцией, и в положении равновесия не имеет минимум, то такое положение равновесия неустойчиво.

Однородность функции порядка k: $f(cx_1, cx_2, ..., cx_n) = c^k f(x_1, x_2, ..., x_n)$

<u>Пример.</u>



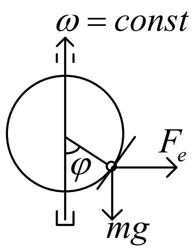
$\Pi = -mgr\cos\theta$.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2} & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\theta\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi\partial\theta} & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

нет устойчивости.

Посмотрите [4] §35 <u>о корректности определения устойчивости</u> (нужно определиться относительно каких обобщенных координат рассматривается устойчивость).

<u>Задача</u> С.14.36.(с дополнением).



□(r, φ, ψ)- сферические координаты.

$r = const$, $\dot{\psi} = \omega = const \Rightarrow \psi = \omega t + \psi_0$

Два уравнения связи. Одна степень свободы.

$q = \varphi$.

Переходим в неинерциальную систему отсчета.

В этой системе отсчета мы рассматриваем относительное равновесие на основании принципа Даламбера. Его формулировка есть в [2] §4.

Переносная сила инерции:

$F^e = m\omega^2 R\sin\varphi$.

Сила Кориолиса $F_{кор}$ $\perp$всем виртуальным перемещениям$\Rightarrow$работу не совершает.

Принцип виртуальных перемещений:

$\delta A = -d\Pi = -mg\sin\varphi R d\varphi + m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi R d\varphi$,

Положения равновесия:

$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = mg\sin\varphi R - m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi R = 0$,

1. $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

2. $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$.

3. $\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R}$, возможно при $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$, $\varphi = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}$.

Устойчивость:

$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = mgR\cos\varphi - m\omega^2 R^2\cos 2\varphi$,

1. $\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_1 = mgR - m\omega^2 R^2 \succ 0$, для устойчивости нужен строгий минимум потенциальной энергии.

Устойчивость $\varphi = 0$ при $\omega^2 \leq \frac{g}{R}$.

$\omega^2 = \frac{g}{R}, \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = 0, \frac{\partial^3\Pi}{\partial\varphi^3} = 0, \frac{\partial^4\Pi}{\partial\varphi^4} \succ 0$.

2. Неустойчивость $\varphi = \pi$, т.к. $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} \prec 0$.

3. $\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_3 = mgR\frac{g}{\omega^2 R} - m\omega^2 R^2\left(2\frac{g^2}{\omega^4 R^2} - 1\right) = -\frac{mg^2}{\omega^2} + m\omega^2 R^2 \succ 0 \Rightarrow \omega^4 \succ \frac{g^2}{R^2}$. Если $\omega^4 = \frac{g^2}{R^2}$, то повторяется случай 1. $\varphi = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}$ всегда устойчиво, когда существует, т.е. при $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$.■

СЕМИНАР №3.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ.

Указатель литературы.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §40-41, с.200-212

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... Глава 6, §6, с.242-247

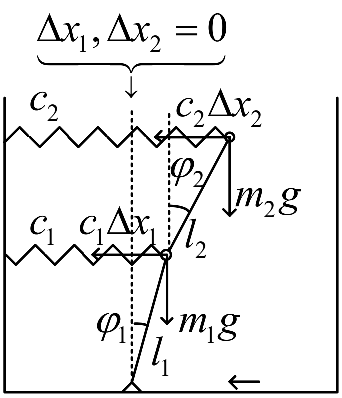
Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990... Глава XIV, §2 (кроме п.230), с.518-525

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. ..... Гл. 4, §18-20, 22, с.97-106, 108-109

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... Глава 10, §40 (п.2), с.177-180

Прежде чем перейти к теме «малые колебания консервативных систем», продолжим исследование устойчивости консервативных систем на следующем примере.

Исследуем устойчивость вертикального положения равновесия следующей системы.



φ_1, φ_2 -обобщенные координаты, малые углы.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{c_1 l_1^2 \sin^2 \varphi_1}{2} + m_1 g l_1 \cos\varphi_1 +$$
$$+\frac{c_2\left(l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2\right)^2}{2} +$$
$$+m_2 g\left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)$$

Линеаризуем эту систему. При малых углах $\varphi_1, \varphi_2 \to 0$ тригонометрические функции можно разложить в ряд Тейлора до второго порядка $\cos\varphi \to 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, а $\sin\varphi \to \varphi$. С учетом этого, упростив, получим квадратичную форму:

$$\Pi = \frac{\varphi_1^2}{2}\left(c_1 l_1^2 - m_1 g l_1 + c_2 l_1^2 - m_2 g l_1\right) + \frac{\varphi_2^2}{2}\left(c_2 l_2^2 - m_2 g l_2\right) +$$
$$+\frac{2\varphi_1\varphi_2}{2}\left(c_2 l_1 l_2\right) + \Pi_0$$

Π_0 - эта константа в исследовании роли не играет, поскольку потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной константы.

Составляем матрицу коэффициентов квадратичной формы потенциальной энергии:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2} & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} \\ \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_2^2} \end{Vmatrix}$$

По теореме Лагранжа-Дирихле для того, чтобы положение равновесия было устойчиво достаточно, чтобы потенциальная энергия в этом положении имела строгий изолированный минимум. Это достигается при использовании **критерия Сильвестра** в том случае, когда **главные миноры составленной матрицы строго больше нуля.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(c_1 l_1^2 - m_1 g l_1 + c_2 l_1^2 - m_2 g l_1\right) & \left(c_2 l_1 l_2\right) \\ \left(c_2 l_1 l_2\right) & \left(c_2 l_2^2 - m_2 g l_2\right) \end{vmatrix} > 0,$$
$$\left(c_1 l_1^2 - m_1 g l_1 + c_2 l_1^2 - m_2 g l_1\right) > 0$$

Малые колебания подразумевают **линеаризацию,** т.е. отбрасывание членов выше определенного порядка для того, чтобы при составлении уравнений Лагранжа получилась линейная система дифференциальных уравнений. Поскольку поведение консервативной системы полностью описывается двумя функциями T, Π, то после линеаризации запишем их в квадратичной форме, при этом <u>будем требовать, чтобы эти формы были положительно-определенными</u>. Положительная определенность следует из физического смысла кинетической энергии $\left(T = m\upsilon^2/2 > 0, \upsilon \neq 0\right)$ и из теоремы Лагранжа-Дирихле, потому что мы рассматриваем малые колебания около <u>устойчивого</u> положения равновесия ($\Pi = \Pi_2 > 0$).

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\ ,\ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k$$

Составляем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \tilde{Q}_i,\ i = \overline{1,n}$$

Для консервативных систем: $\Phi = 0, \tilde{Q}_i = 0$. Поэтому, подставив T, Π, в уравнения Лагранжа, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k\right) = 0, i = \overline{1,n}\ .$$

Частное решение этой системы уравнений ищется в виде $q_k = u_k\sin\left(\omega t + \alpha\right)$, причем для всех k предполагаются одни и те же ω и α. Поставляем в уравнения Лагранжа и получаем линейную систему алгебраических уравнений:

$\sum_{k=1}^{n}\left(c_{ik} - \omega^2 a_{ik}\right)u_k = 0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$, где $\vec{u}$ - неизвестная величина.

Чтобы получить нетривиальные (ненулевые) решения этой системы, мы должны приравнять нулю определитель матрицы коэффициентов этой системы:

$$\det\left\|c_{ik} - \omega^2 a_{ik}\right\| = 0\ .$$

Это уравнение носит название **вековое уравнение частот**.

Раскрыв определитель получаем относительно $\lambda = \omega^2$ полином степени n. Решения ω - называются **собственными частотами**.

Остановимся на случае различных собственных частот $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

Поскольку полином $f\left(\lambda\right) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ степени n, имеется n решений.

Каждой собственной частоте ω_j найдем соответствующий **амплитудный вектор** $\vec{u}_j$ из системы:

$\left(C-\omega_j^2 A\right)\vec{u}_j = 0$, где C - матрица потенциальной энергии,

A - матрица кинетической энергии.

После того, как найдены $\vec{u}_j$, можно записать **общее решение:**

$$\vec{q} = \sum_j C_j \vec{u}_j \sin\left(\omega_j t + \alpha_j\right) = \sum_j C_j \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \dots \\ u_{nj} \end{pmatrix} \sin\left(\omega_j t + \alpha_j\right),$$

α_j **- фаза,**

$\vec{u}_j \sin\left(\omega_j t + \alpha_j\right)$ **- описывает движение, называемое** $j-\text{тым}$ **главным колебанием.**

Оно содержит $2n$ констант: $n\left(C_j\right) + n\left(\alpha_j\right) = 2n$.

Константы находятся из начальных условий.

Свойства амплитудных векторов, соответствующих различным частотам.

1) Линейно независимы и ортогональны в А-метрике (А-ортогональность). Т.е. $\vec{u}_s^T A \vec{u}_j = 0$ при $\omega_s \neq \omega_j$. Отсюда следует также С-ортогональность.

Помножим слева $\left(C-\omega_j^2 A\right)\vec{u}_j = 0$ на $\vec{u}_s^T$ и $\left(C-\omega_s^2 A\right)\vec{u}_s = 0$ на $\vec{u}_j^T$. Тогда:

$$\begin{cases} \vec{u}_s^T * \left(\left(C-\omega_j^2 A\right)\vec{u}_j = 0\right) \\ \vec{u}_j^T * \left(\left(C-\omega_s^2 A\right)\vec{u}_s = 0\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\omega_s^2 - \omega_j^2\right)\vec{u}_s^T A \vec{u}_j = 0.$$

Если $\omega_s \neq \omega_j$, то $\vec{u}_s^T A \vec{u}_j = 0$. Из той же системы получается $\vec{u}_s^T C \vec{u}_j = 0$.

Из А-ортогональности следует также линейная независимость.

Докажем это методом от противного. Допустим, есть линейная зависимость.

Тогда:

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots + k_n\vec{u}_n = 0$$

Помножим это уравнение слева на $\vec{u}_j^T A$:

$$\vec{u}_j^T A * \left(k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \dots + k_n\vec{u}_n = 0\right)$$

Вследствие А-ортогональности, после умножения останется только

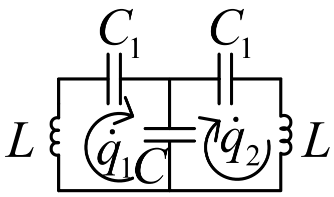
$$\vec{u}_j^T A \vec{u}_j = 0$$

Отсюда следует, что $\vec{u}_j = 0$. Но $\vec{u}_j \neq 0$, следовательно, изначальное предположение о линейной зависимости неверно. Т.е. А-ортогональные амплитудные вектора линейно независимы.

Доказательство линейной независимости см. также в [4] с.179.

2) Амплитудные векторы известны с точностью до произвольной константы, являющейся их длиной, т.е. изменчивы по модулю, но не по направлению. Это следует из того, что ранг линейной системы равен $(n-1)$ при n неизвестных.

<u>Задача С.16.38.</u>



$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0,\ q_1(0) = q_{10}, q_2(0) = q_{20}$

Кинетическая энергия $T = \frac{L}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)$

Потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2C_1}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \frac{1}{2C}\left(q_1 - q_2\right)^2$, $\Phi = 0, \tilde{Q}_1 = 0, \tilde{Q}_2 = 0$

Уравнения Лагранжа:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \tilde{Q}_i$, где $i = 1,2$.

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 + \frac{1}{C}\left(q_1 - q_2\right) = 0 \\ L\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_1}q_2 + \frac{1}{C}\left(q_2 - q_1\right) = 0 \end{cases}$$

Решение ищем в виде $q_i = u_i \sin\left(\omega t + \alpha\right)$, $i = 1,2$. После подстановки в систему и сокращения $\sin\left(\omega t + \alpha\right)$ получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} - L\omega^2\right)u_1 - \frac{1}{C}u_2 = 0 \\ -\frac{1}{C}u_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} - L\omega^2\right)u_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система будет иметь нетривиальные решения, когда определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-L\omega^2\right) & -\frac{1}{C}\\ -\frac{1}{C} & \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2-\left(\frac{1}{C}\right)^2=0$$

Отсюда получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-L\omega^2\right)+\frac{1}{C}=0\\ \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-L\omega^2\right)-\frac{1}{C}=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\omega_1^2=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{2}{C}\right)\frac{1}{L}\\ \omega_2^2=\frac{1}{C_1L}\end{array}\right.$$

Подставляем эти значения в систему:

1. $\omega_1^2=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{2}{C}\right)\frac{1}{L}:\ \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-\frac{1}{C_1}-\frac{2}{C}\right)u_1-\frac{1}{C}u_2=0\Rightarrow u_1=-u_2$

$\vec{u}_1=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix}$ - амплитудный вектор соответствующий ω_1.

2. $\omega_2^2=\frac{1}{C_1L}:\ \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}-\frac{1}{C_1}\right)u_1-\frac{1}{C}u_2=0\Rightarrow u_1=u_2$

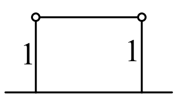
$\vec{u}_2=\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}$ - амплитудный вектор соответствующий ω_2.

Амплитудные вектора ортогональны.

Общее решение:

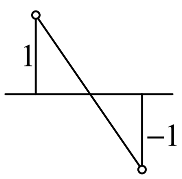
$$\begin{Vmatrix}q_1\\q_2\end{Vmatrix}=\underbrace{C_1\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix}\sin\left(\left(\sqrt{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{2}{C}\right)\frac{1}{L}}\right)t+\alpha_1\right)}_{ПЕРВОЕ\_ГЛАВНОЕ\_КОЛЕБАНИЕ}+\underbrace{C_2\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}\sin\left(\left(\sqrt{\frac{1}{C_1L}}\right)t+\alpha_2\right)}_{ВТОРОЕ\_ГЛАВНОЕ\_КОЛЕБАНИЕ}$$

Можно построить **форму главных колебаний по амплитудным векторам**. По оси аргументов берут степень свободы, по оси значений берут амплитуду.



$\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}$

Линия, соединяющая точки значений, не пересекает ось аргументов. Если не пересекает, говорят «в фазе».



$\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix}$

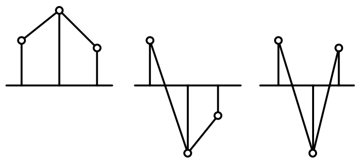
Линия, соединяющая точки значений, пересекает ось аргументов. Если пересекает, говорят «в противофазе».

В системе с n степенями свободы возможно от нуля до $(n-1)$ пересечений (узлов).

Например, при $n=2$ максимальное количество узлов равно 1.

При $n=3$ максимальное количество узлов равно 2.

Возможные формы главных колебаний при $n=3$:



Продолжим решение задачи C.16.38.

С учетом начальных условий получим:

$$\begin{cases} q_1(0) = q_{10} = C_1 \sin\alpha_1 + C_2 \sin\alpha_2 \\ q_2(0) = q_{20} = -C_1 \sin\alpha_1 + C_2 \sin\alpha_2 \\ \dot{q}_1(0) = 0 = C_1\omega_1 \cos\alpha_1 + C_2\omega_2 \cos\alpha_2 \\ \dot{q}_2(0) = 0 = -C_1\omega_1 \cos\alpha_1 + C_2\omega_2 \cos\alpha_2 \end{cases}$$

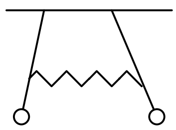
Отсюда следует:

$\begin{cases} 2C_1\omega_1 \cos\alpha_1 = 0 \\ 2C_2\omega_2 \cos\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}, \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$, поскольку $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$.

Далее, $C_1 = \dfrac{q_{10} - q_{20}}{2}, C_2 = \dfrac{q_{10} + q_{20}}{2}$.

При $q_{10} = q_{20}$ $C_1 = 0$, реализуется второе главное колебание. При $q_{10} = -q_{20}$ $C_2 = 0$, реализуется первое главное колебание.

Механическим аналогом исследуемой в задаче C.16.38. электрической схемы будет:



Замечание. В задаче C.16.38. были честно посчитаны амплитудные векторы, однако в случае симметрии системы, можно угадать один или несколько амплитудных векторов, а остальные найти из условия ортогональности по матрице А. Угадывание приводит к упрощению решения системы уравнений. Об этом будет рассказано на семинаре №4.

Квадратичные формы T и Π, поскольку они положительно определены, одновременно приводятся к канонической форме линейным невырожденным преобразованием: $q_k = \sum u_{ik}\theta_i$.

$T = \frac{1}{2}\sum \dot{\theta}_i^2, \Pi = \frac{1}{2}\sum \omega_i^2\theta_i^2 \Rightarrow \ \ddot{\theta}_i + \omega_i^2\theta_i = 0$.

$\vec{\theta}$ - называются **главными или нормальными координатами.**

Решение: $\theta_i = C_i \sin\left(\omega_i t + \alpha_i\right)$.

При $\omega_s \neq \omega_j$ выполняется $\vec{u}_s^T A\vec{u}_j = \delta_{sj}$ - ортонормированность в А-метрике (А-ортонормированность), где δ_{sj} -символ Кронекера.

<u>Замечание по поводу амплитудных векторов</u>.

В случае различных собственных частот ранг системы $\left(C - \omega_j^2 A\right)\vec{u}_j = 0$ равен $(n-1)$ и амплитудные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, т.е. направление амплитудного вектора находится однозначно, а модуль может быть произвольным. В случае кратных собственных частот ранг системы $\left(C - \omega_j^2 A\right)\vec{u}_j = 0$ равен $(n-m)$, где m - кратность корня $\lambda_i = \omega_i^2$, и однозначности в направлении амплитудных векторов нет. Выполняется лишь условие независимости и условие А-ортогональности к векторам, соответствующим другим частотам.

Например.

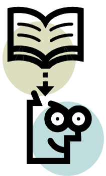
$\omega_1, \omega_2 = \omega_3 \Rightarrow$ ранг системы равен 1.

Есть $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, причем $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ лежат в плоскости ортогональной $\vec{u}_1$, но $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ необязательно ортогональны. Независимость $\vec{u}_j$ сохраняется, а ортогональности может и не быть. Тем не менее, мы можем искусственно потребовать А-ортогональность амплитудных векторов, соответствующих одинаковым частотам, для того чтобы наверняка получить их линейную независимость.

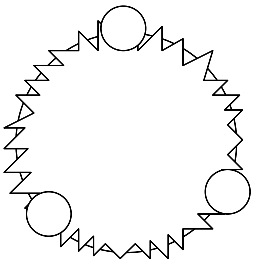
Домашнее задание. Обратите внимание на задачу С.15.18.

СЕМИНАР №4.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).



Задача



Обруч в горизонтальной плоскости.

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}\sum \dot{x}_i^2,$$

$$\Pi = \frac{c}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\right)$$

$L = \mathrm{T} - \Pi$, подставляем в уравнения Лагранжа и получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 - cx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2cx_2 - cx_1 - cx_3 = 0, \\ m\ddot{x}_3 + 2cx_3 - cx_1 - cx_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы ищем в виде: $x_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$. Подставляем в систему, сокращаем $\sin(\omega t + \alpha)$:

$$\begin{cases} \left(2c - m\omega^2\right)u_1 - cu_2 - cu_3 = 0 \\ -cu_1 + \left(2c - m\omega^2\right)u_2 - cu_3 = 0 \\ -cu_1 - cu_2 + \left(2c - m\omega^2\right)u_3 = 0 \end{cases},$$

Не решая систему относительно u_1, u_2, u_3, угадываем амплитудные векторы, исходя из симметрии системы:

$\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3$, в одну сторону. Первый амплитудный вектор.

$\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \upsilon_1 = -\upsilon_3$, в разные стороны, а $\upsilon_2 = 0$. Второй амплитудный вектор.

$\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$ Третий амплитудный вектор ищем из условия ортогональности.

$A = E \Rightarrow$

$\vec{u}_1^T A\vec{u}_3 = 0 : \alpha + \beta + \gamma = 0$,

$\vec{u}_2^T A\vec{u}_3 = 0 : \alpha - \gamma = 0$.

$\beta = -2\gamma, \alpha = \gamma \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$ - третий амплитудный вектор.

Нашли все амплитудные векторы. Ищем собственные частоты, не решая характеристическое уравнение. Подставляем $\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix}_j$ в систему:

j=1: $2c - m\omega^2 - c - c = 0 \to \omega^2 = 0 \to \omega_1 = 0$.

j=2: $2c - m\omega^2 + c = 0 \to \omega^2 = \frac{3c}{m} \to \omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{m}}$.

j=3: $2c - m\omega^2 + 2c - c = 0 \to \omega^2 = \frac{3c}{m} \to \omega_3 = \sqrt{\frac{3c}{m}}$.

$\omega_1^2 = 0, \omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{3c}{m}$. Вторая частота кратности 2.

Общее решение:

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = \left(C_1 t + C_0\right)\left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\| + C_2\left\|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right\|\sin\left(\sqrt{\frac{3c}{m}}t + \alpha_2\right) + C_3\left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix}\right\|\sin\left(\sqrt{\frac{3c}{m}}t + \alpha_3\right)$$

Вместо $\vec{u}_3$ мы могли взять другой амплитудный вектор, например, $\left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right\|$, но при этом уже не было бы взаимной ортогональности всех амплитудных векторов: $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, но $\vec{u}_2 \angle \vec{u}_3$.

<u>Домашнее задание.</u>

Потренируйтесь угадывать амплитудные вектора.

СЕМИНАР №5.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ.

Указатель литературы.

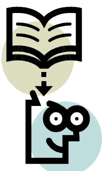
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §35-39, с.174-200

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... Глава 6, §5 (п.1-3, 5), с.222-242

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... Глава XV, §3-4, с.547-563

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... Глава 5, §23-27, с.109-128

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... Глава 9, §36-37, с.157-165



Асимптотическая устойчивость равновесия:

1) устойчивость (см. пред. семинар);

2) $\exists \delta_0 \succ 0 : \left|q_i(0)\right| \prec \delta_0, \left|\dot{q}_i(0)\right| \prec \delta_0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\left|q_i(t)\right| = 0, \lim\limits_{t\to\infty}\left|\dot{q}_i(t)\right| = 0$

Линеаризуется стационарная система:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1,..,x_n), i = \overline{1,n} \quad \text{Стационарная система}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \text{Линейная система}$$

Решение ищем в виде: $x_i = \sum_{k=1}^{n} C_k u_{ik} e^{\lambda_k t}$ (Корни все различны)

Если λ_1 кратности m: $x_i = \sum_{k=1}^{m} C_k u_{ik} t^{k-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k u_{ik} e^{\lambda_k t}$.

$\boxed{\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \forall k}$

- Требуем это условие для того, чтобы экспоненты были затухающими. Затухание дает устойчивость при $t \to \infty$.

Действительно,

$e^{\lambda_k t} = e^{(\operatorname{Re}\lambda_k + i \operatorname{Im}\lambda_k)t} = e^{\operatorname{Re}\lambda_k t}\left(\cos\left(\operatorname{Im}\lambda_k\right) + i\sin\left(\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right)$

Затухающая экспонента, т.е. с $\operatorname{Re}\lambda_k \prec 0$, может «затушить» любой полином и любую периодическую ограниченную функцию.

Подставив в систему дифференциальных уравнений, и сократив слева и справа экспоненты, мы получим линейную систему уравнений. Эта система будет иметь нетривиальные решения, если определитель, составленный из коэффициентов этой системы, будет равен нулю. Раскрывая этот определитель, получим **характеристическое уравнение** $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + .. + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$. Если все его решения имеют корни с $\operatorname{Re}\lambda_k \prec 0$, то характеристический полином называют **гурвицевым**.

$\boxed{a_o \succ 0 \Leftrightarrow a_i \succ 0, \forall i}$ (или $a_o \prec 0 \Leftrightarrow a_i \prec 0, \forall i$, но можно помножить характеристическое уравнение на -1 и получим первый вариант $a_o \succ 0 \to a_i \succ 0, \forall i$) (**Необходимое условие асимптотической устойчивости**)

Пример.

$\lambda^3 + 2\lambda + 1$ не надо исследовать, т.к. нет константы при λ^2, она равна нулю и, значит, не выполняется необходимое условие асимптотической устойчивости.

Критерий Рауса-Гурвица.

Для $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + .. + a_{n-1}\lambda + a_n$ **составляем матрицу Гурвица**

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & .. & .. \\ a_0 & a_2 & a_4 & .. & .. \\ 0 & a_1 & a_3 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & a_n \end{Vmatrix}$$

Обратите внимание, что первый элемент на диагонали a_1, а не a_0.

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы были больше нуля все главные миноры матрицы Гурвица $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_{n-1} > 0, \Delta > 0$.

<u>Критерий Рауса-Гурвица в форме Льенара-Шипара.</u> Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось необходимое условие устойчивости, т.е. $a_o \succ 0 \Leftrightarrow a_i \succ 0, \forall i$, а также были больше нуля все четные (либо нечетные) главные миноры матрицы Гурвица $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, ...$ (либо $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, ...$).

<u>Геометрический критерий Михайлова.</u>

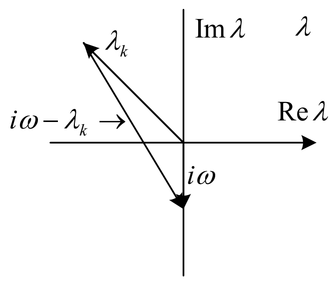
Характеристический полином можно записать в виде произведения скобок, содержащих корни характеристического уравнения.

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$$

Введем параметр $\omega : -\infty \prec \omega \prec \infty$ (его положительное значение соответствует частоте) так, что $\lambda = i\omega$.

Исследуем годограф Михайлова – годограф комплексного числа $f(i\omega) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (i\omega - \lambda_k)$.

Рассмотрим комплексную плоскость, в которой расположен вектор $\overrightarrow{(i\omega - \lambda_k)}$.



$\overrightarrow{(i\omega - \lambda_k)}$ - вращается против часовой стрелки при изменении ω от $-\infty$ до ∞ для корня с отрицательной действительной частью и по часовой стрелке для корня с положительной действительной частью. От направления вращения зависит знак приращения аргумента (угла) этого вектора.

Приращение аргумента характеристического полинома, как сумма приращений аргументов всех векторов $\overrightarrow{(i\omega-\lambda_k)}$, где $k=\overrightarrow{1,n}$, а n - порядок характеристического полинома, дается формулой:

$\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty}\arg f(i\omega)=l\pi-r\pi$, или

$\Delta_{\omega=0}^{\infty}\arg f(i\omega)=\dfrac{l\pi-r\pi}{2}$,

где l - число корней слева от мнимой, r - число корней справа от мнимой оси в плоскости $(\operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Im}\lambda)$. Полное число корней в случае устойчивости $l+r=n$. Если все корни будут слева от мнимой оси, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_k \prec 0$, то должно выполняться $l=n,r=0$, и, следовательно, $l-r=n$.

Таким образом, условие асимптотической устойчивости:

$\Delta_0^{\infty}\arg f(i\omega)=\dfrac{n\pi}{2}$, где n - степень характеристического полинома.

Для асимптотической устойчивости характеристического полинома необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента годографа Михайлова при монотонном изменении частоты ω от нуля до $+\infty$ равнялось $\frac{n\pi}{2}$, где n - степень характеристического полинома, т.е. $\Delta_0^{\infty}\arg f(i\omega)=\frac{n\pi}{2}$. Отсюда следует, что $l=n$. А также - непрохождение годографа через 0.

В большинстве случаев нам неизвестны корни характеристического уравнения. Однако мы можем построить годограф Михайлова для данного характеристического полинома $f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+..+a_{n-1}\lambda+a_n$, заменив переменную λ на $i\omega$ и отделив действительную и мнимую части

$f(i\omega)=u(\omega)+i\upsilon(\omega)$.

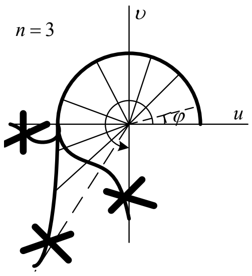
Заметим, что в $u(\omega)$ входят только четные степени ω, в $\upsilon(\omega)$ - только нечетные:

$u(-\omega)=u(\omega),\upsilon(-\omega)=-\upsilon(\omega)$.

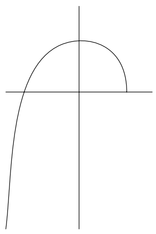
Изменяем ω в пределах $\omega \in [0,\infty)$, строим годограф Михайлова – годограф комплексного числа $f(i\omega) = u(\omega) + i\upsilon(\omega)$.

Годограф Михайлова не стремится ни к какой асимптоте, в том числе к осям, также как, например, ветви параболы или гиперболы.

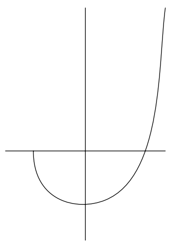
Например, в случае $n = 3$, зачеркнуты «неправильные хвосты» в третьем квадранте:



При этом $tg\varphi = \dfrac{\upsilon}{u} \to \infty$, $\Delta_0^\infty \arg f(i\omega) = \dfrac{n\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$.



- «правильный» годограф Михайлова при асимптотической устойчивости с $n = 3$.



$a_0 \prec 0$,

тоже асимптотическая устойчивость в соответствии с критерием Михайлова.

Для лучшего понимания, разберем задачу.

<u>Задача</u> С.17.13.

$\lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 3 + k = 0$.

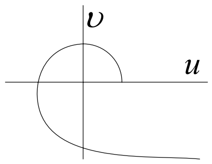
Необходимое условие устойчивости: $k \succ -3$.

$\lambda = i\omega$: $u = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 + k$, $\upsilon = -\omega^3 + 2\omega$.

При $k = 0$: $u = 0$, если $\omega^2 = 1, \omega^2 = 3$;

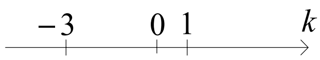
$\upsilon = 0$, если $\omega = 0, \omega^2 = 2$.

ω	u	υ
0	3	0
1	0	1
$\sqrt{2}$	-1	0
$\sqrt{3}$	0	-$\sqrt{3}$
∞	∞	-∞



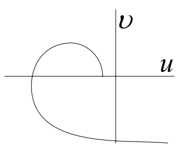
Устойчивость.

u стремится к ∞ быстрее υ.



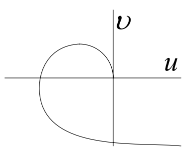
Рассмотрим ось k с выделенными точками, которые находим из условия прохождения годографа Михайлова через $(u, \upsilon) = (0,0)$.

1) $k \prec -3$



$l + r = 4$, $l\frac{\pi}{2} - r\frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $l = 3, r = 1$. Неустойчивость.

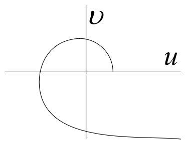
2) $k = -3$



$l + r + 1 = 4$, $l\frac{\pi}{2} - r\frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $l = 3, r = 0$. Неустойчивость.

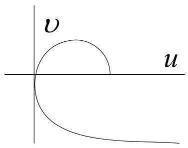
{К $l+r$ добавили 1, потому что годограф пересекает 0 при $\omega = 0$ }

3) $-3 \prec k \prec 1$



$l+r=4$, $l\frac{\pi}{2}-r\frac{\pi}{2}=4\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $l=4, r=0$. Устойчивость.

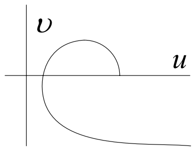
4) $k=1$



$l+r+2=4$, $l\frac{\pi}{2}-r\frac{\pi}{2}=2\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $l=2, r=0$. Неустойчивость.

{К $l+r$ добавили единожды 2, потому что годограф единожды пересекает 0 при $\omega \neq 0$ }

5) $k \succ 1$



$l+r=4$, $l\frac{\pi}{2}-r\frac{\pi}{2}=0\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ $l=2, r=2$. Неустойчивость.

Замечание. Если годограф $f(i\omega)$ пересекает начало координат, из рассмотрения можно исключить корень с $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Для этого, определив ω_0, при котором $f(i\omega)=0$, нужно построить годограф функции $\frac{f(i\omega)}{(\lambda^2+\omega_0^2)}$.

<u>Задача.</u>

$$\begin{cases} m\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx = A(\omega-\omega_0) \\ J\dot{\omega} = -Bx \end{cases}$$

Исследовать устойчивость режима, поддерживающего ω_0.

Замена переменной: $\Omega = \omega - \omega_0$.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = A\Omega \\ J\dot{\Omega} = -Bx \end{cases}$$

Подставляем в эту систему уравнений $x = u_1 e^{\lambda t}, \Omega = u_2 e^{\lambda t}$, сокращаем $e^{\lambda t}$, записываем определитель коэффициентов системы линейных уравнений относительно λ.

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + \beta\lambda + c & -A \\ B & J\lambda \end{vmatrix} = mJ\lambda^3 + \beta J\lambda^2 + cJ\lambda + AB = 0.$$

И вообще, для системы $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, где A, B, C - матрицы, q - вектор, характеристический полином получается раскрытием определителя:

$$\det\left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Необходимое условие устойчивости: $AB \succ 0$, поскольку все остальные коэффициенты положительны.

Определитель Гурвица:

$$\begin{vmatrix} \beta J & AB & 0 \\ mJ & cJ & 0 \\ 0 & \beta J & AB \end{vmatrix}$$. По критерию Гурвица в форме Льенара-Шипара Δ_2 должно быть больше нуля.

$\beta c J^2 - mJAB \succ 0$, $(\beta cJ - ABm)J \succ 0$, т.е. $0 \prec AB \prec \dfrac{\beta cJ}{m}$.

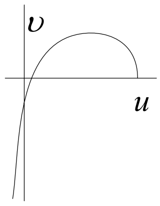
Пусть, для примера: $m, \beta, c, J = 1$, а $AB = 2$. Будет неустойчивость. Проверим с помощью критерия Михайлова.

$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$u = -\omega^2 + 2$, $\omega^2 = 2$

$\upsilon = -\omega^3 + \omega$, $\omega = 0, \omega^2 = 1$

ω	u	υ
0	2	0
1	1	0
$\sqrt{2}$	0	-$\sqrt{2}$
∞	-∞	-∞



$l+r=3$, $l\dfrac{\pi}{2}-r\dfrac{\pi}{2}=-1\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=1, r=2$. Неустойчивость

СЕМИНАР №6.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ.

Указатель литературы.

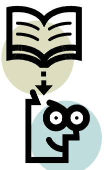
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. ....§42-43, 47, с.212-220, 233-239

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... Глава 6, §7, с.247-265

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.. Глава XIV, §2 (п.230), с.525-533

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. ....Гл.4-5, §21, 28 с.106-108, 128-135

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ...Глава 10, §39-43, с.171-207



Рассматривается склерономная система в линеаризованной форме.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{jk}\ddot{q}_k+b_{jk}\dot{q}_k+c_{jk}q_k\right)=Q_j(t),\ j=\overline{1,n}$$

Предполагается асимптотическая устойчивость положения равновесия.

<u>Общее решение системы</u>: $q_k=q_{\text{k}}^{\text{одн}}+q_{\text{k}}^{\text{частн}}$,

где $q_{\text{k}}^{\text{одн}}$ - <u>решение однородной системы</u>,

$q_{\text{k}}^{\text{частн}}$ - <u>частное решение неоднородной системы</u>.

Исследуется вопрос: по известному возмущению $Q_j(t)$ вычислить отклик $q_k(t)$.

Справедлив **принцип суперпозиции**. Если воздействиям $Q_j(t),\ j=\overline{1,m}$,

соответствуют отклики $q_j(t),\ j=\overline{1,m}$, то воздействию $\sum_{j=1}^{m}Q_j(t)$ соответствует отклик

$\sum_{j=1}^{m}q_j(t)$.

В силу этого принципа исследуем воздействие только по одной координате.

Пусть $Q_j(t)=\begin{cases}Q(t),\ j=l\\ 0,\ j\neq l\end{cases}$

$$Q(t)=h\sin(pt)\to Q(t)=he^{ipt}$$

p - частота вынуждающей силы.

В случае периодической негармонической силы, ее можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям. В случае непериодической силы используются интегралы Фурье.

$q_k=D_ke^{ipt}$ - <u>ищем решение на частоте вынуждающей силы</u>, <u>потому что решение однородной системы через определенное время становится сколь угодно малым</u>.

$$\sum\left(a_{jk}(ip)^2+b_{jk}(ip)+c_{jk}\right)D_k=\begin{cases}h,\ j=l\\ 0,\ j\neq l\end{cases}$$

По <u>правилу Крамера</u> решением будет:

$$D_k=h\frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$$

где Δ_{lk} - <u>алгебраическое дополнение</u> до элемента lk матрицы коэффициентов линейной системы, Δ - <u>определитель</u> этой системы.

Можно записать в таком виде:

$$D_k = hW_{lk}(ip) = h\left|W_{lk}(ip)\right| e^{i\arg W_{lk}(ip)} = hR_{lk}(p)e^{i\Psi_{lk}(p)}$$

Тогда

$$q_k = hR_{lk}(p)e^{i\left(pt+\Psi_{lk}(p)\right)}$$

<u>На выходе видим искажение амплитуды и фазы входного сигнала</u>.

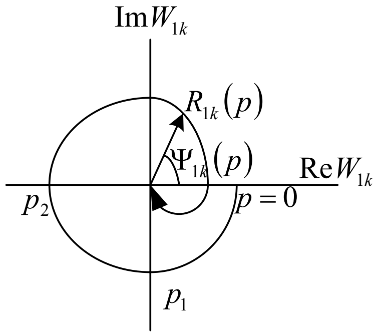
Множитель при h определяется исключительно матрицами A, B, C и носит название **амплитудно-фазовой характеристики (АФХ)**:

$$W_{lk}(ip) = \frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$$

$R_{lk}(p)$ - **амплитудная характеристика**.

$\Psi_{lk}(p)$ - **фазовая характеристика**.

<u>Пример.</u>



Воздействие: $Q_1(t) = h_0 + h_1 e^{ip_1 t} + h_2 \cos(p_2 t)$

Отклик, например: $q_k = h_0 R_{1k}(0) + h_1 R_{1k}(p_1)e^{i\left(p_1 t - \pi/2\right)} + h_2 R_{1k}(p_2)\cos(p_2 t - \pi)$

<u>Если подано воздействие только по одной координате, число АФХ равно</u> n, <u>если по всем координатам</u>, то n^2.

$$W_{lk}(ip) = \frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)} = \frac{1}{\Delta}\Delta_{lk}(ip) = \frac{r_{lk}}{r}e^{i(\varphi_{lk}-\varphi)}$$

$\Delta(ip) = re^{i\varphi}$ - годограф Михайлова, который не проходит через 0, в силу асимптотической устойчивости системы по условию.

$\frac{1}{\Delta}$ - общий множитель для всех АФХ.

$\Delta_{lk}(ip) = r_{lk}e^{i\varphi_{lk}}$ - меняется в зависимости от l и k.

Пример. Рассмотрим **систему с одной степенью свободы**.

$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = he^{ipt}$

ω - собственная частота соответствующей консервативной системы, δ - декремент затухания.

Будем считать $2\delta^2 \prec \omega^2$

$q = De^{ipt}$

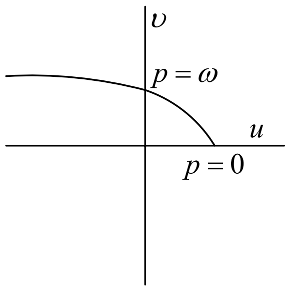
$\left((ip)^2 + 2\delta ip + \omega^2\right)D = h$

$$W = \frac{1}{\omega^2 - p^2 + i2\delta p} = \frac{1}{\Delta}$$

$\Delta = u + i\upsilon$

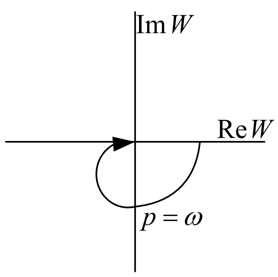
$u = \omega^2 - p^2$. $u = 0$ при $p = \omega$

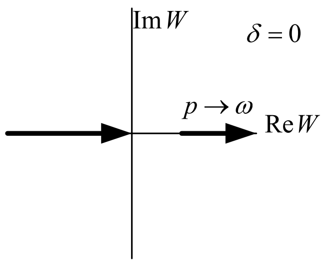
$\upsilon = 2\delta p$. $\upsilon = 0$ при $p = 0$



Годограф Михайлова.

График $\Delta(ip) = re^{i\varphi}$ - это годограф Михайлова системы и, взяв величину, обратную модулю, и аргумент, равный: $-\varphi$, несложно получить график $W = \dfrac{1}{\Delta(ip)}$





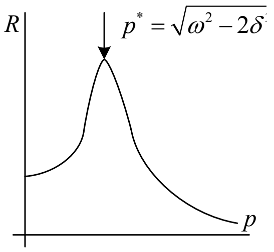
Графики АФХ при $\delta \neq 0$ и при $\delta = 0$. Как видно при $\delta = 0$ $\operatorname{Im} W(p=\omega)$ уходит в $-\infty$ а АФХ растягивается по оси $\operatorname{Re} W$, становясь разрывной.

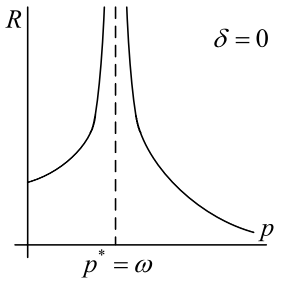
$R(p) = |W(ip)| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4\delta^2 p^2}}$ **Амплитудная характеристика**.

$$\frac{dR}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{2\left(\omega^2 - p^2\right)(-2p) + 8\delta^2 p}{\left(\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4\delta^2 p^2\right)^{3/2}} = 0$$

$p = 0$

$-\omega^2 + p^2 + 2\delta^2 = 0$, $p^* = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$





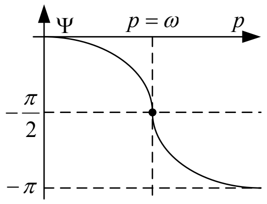
<u>Графики амплитудной характеристики</u> при $\delta \neq 0$, и при $\delta = 0$.

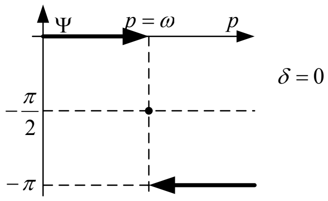
Здесь также при $\delta = 0$ при $p = \omega$ наблюдается разрыв функции.

Резкое возрастание амплитуды отклика, когда частота внешней силы приближается к $p = p^*$ называется **резонансом**, а соответствующая **частота резонансной**. У консервативной системы $(\delta = 0)$ резонансной частотой называется значение p, при котором амплитудная характеристика системы имеет разрыв второго рода.

Консервативная система резонирует на всех своих собственных частотах и только на них.

$\Psi = \arg W(ip) = arctg\left(\dfrac{-2p\delta}{\omega^2 - p^2}\right)$ **Фазовая характеристика.**





Графики фазовой характеристики при $\delta \neq 0$, и при $\delta = 0$.

Обратите внимание, что при $\delta = 0$ на резонансной частоте $p = \omega$ сдвиг по фазе в отклике по отношению к воздействию равен $-\frac{\pi}{2}$.

Если $\delta = 0$, то у нас консервативная система, и все графики становятся разрывными.

Исследуем поведение при резонансе.

$\ddot{q} + \omega^2 q = h \sin pt$.

$$q = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$$

$$q_0 = A,\ \dot{q}_0 = B\omega + \frac{hp}{\omega^2 - p^2} \Rightarrow A = q_0,\ B = \frac{\dot{q}_0}{\omega} - \frac{hp}{\left(\omega^2 - p^2\right)\omega}$$

$$q = \underbrace{q_0 \cos\omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t}_{\text{СОБСТВЕННЫЕ}} \underbrace{\underbrace{-\frac{hp}{\left(\omega^2 - p^2\right)\omega}\sin\omega t}_{\text{СОПРОВОЖДАЮЩИЕ}} + \underbrace{\frac{h}{\left(\omega^2 - p^2\right)}\sin pt}_{\text{ВЫНУЖДЕННЫЕ}}}_{\text{ЗАВИСЯТ\_ОТ\_Р}}$$

Рассмотрим характер зависящих от p колебаний при резонансе.

Приведем зависящие от p колебания к общему знаменателю и посмотрим, что будет при $p = \omega$.

$$\frac{-hp\sin\omega t + h\omega\sin pt}{\omega\left(\omega^2 - p^2\right)} \xrightarrow{p=\omega} \frac{-h\sin\omega t + h\omega t\cos\omega t}{-2\omega^2}$$

Здесь деление на 0 было некорректным, поэтому по правилу Лопиталя были взяты по отдельности производные числителя и знаменателя по p, и затем произведена замена $p = \omega$. В итоге:

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{\dot q_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{ht}{2\omega}\cos\omega t$$

Виден линейный характер возрастания амплитуды при резонансе, а также то, что по истечении большого количества времени сдвиг по фазе становится равным $-\frac{\pi}{2}$ (на входе $\sin pt$, на выходе $-\cos\omega t$, но $\omega = p$ при резонансе.

Задача С.18.43(в).

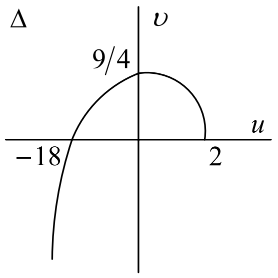
$$\begin{cases} \dot x = -x + A\sin\omega t \\ \dot y = -2y + 2x \\ \dot z = -z + y \end{cases},$$

$$\det\begin{vmatrix} ip+1 & 0 & 0 \\ -2 & ip+2 & 0 \\ 0 & -1 & 1+ip \end{vmatrix} = \Delta = (ip+1)^2(ip+2) =$$

$$= 2\left(1-2p^2\right) + i\left(5p - p^3\right)$$

$$u = 2\left(1-2p^2\right)$$
$$\upsilon = -p^3 + 5p$$

p	u	υ
0	2	0
$1/\sqrt{2}$	0	$9/4$
$\sqrt{5}$	-18	0



Здесь приращение аргумента равно $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$.

Кстати убеждаемся, что имеет место асимптотическая устойчивость.

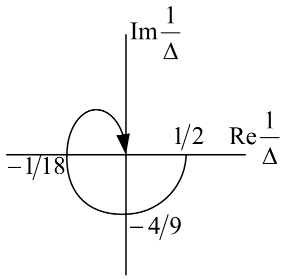
Алгебраическое дополнение до элемента lk, где l - номер строки, k - номер столбца, строится так. В определителе коэффициентов системы Δ, который мы написали выше, вместо элемента с индексом lk ставим 1, а все остальные элементы в столбце k заменяем на 0.

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & ip+2 & 0\\ 0 & -1 & ip+1\end{vmatrix}=-p^2+3ip+2,$$

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix}ip+1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & ip+1\end{vmatrix}=2(ip+1),$$

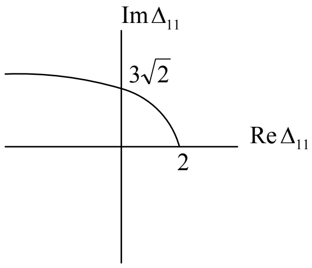
$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix}ip+1 & 0 & 1\\ -2 & ip+2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$



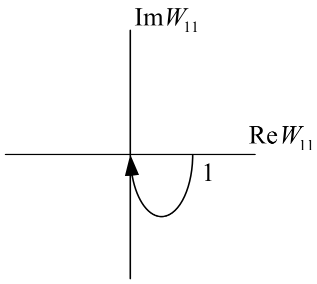
Здесь приращение аргумента равно $-\varphi=-3\dfrac{\pi}{2}$.

$u_{11}=2-p^2$, $\upsilon_{11}=3p$

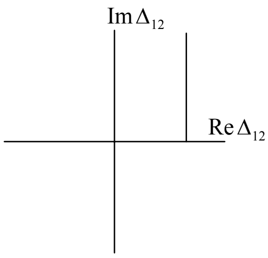


Здесь приращение аргумента равно $\varphi_{11}=2\dfrac{\pi}{2}$.

$$W_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}=\frac{r_{11}}{r}e^{i(\varphi_{11}-\varphi)}$$

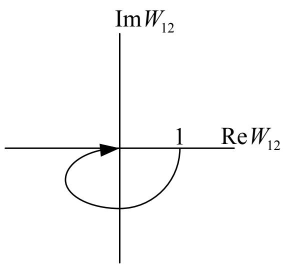


Здесь приращение аргумента равно $\varphi_{11}-\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$.



Здесь приращение аргумента равно $\varphi_{12}=\dfrac{\pi}{2}$.

$$W_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}=\frac{r_{12}}{r}e^{i(\varphi_{12}-\varphi)}$$



Здесь приращение аргумента равно $\varphi_{12}-\varphi=-2\dfrac{\pi}{2}$.

W_{13} будет выглядеть как $\dfrac{1}{\Delta}$, только увеличенной в масштабе в 2 раза.

Действительно, $W_{13}=\dfrac{\Delta_{13}}{\Delta}=2\dfrac{1}{\Delta}$

Немного о **главных нормальных координатах в случае вынужденных колебаний**.

Как известно в главных координатах $T=\dfrac{1}{2}\sum\dot{\theta}_i^2, \Pi=\dfrac{1}{2}\sum\omega_i^2\theta_i^2$, а амплитудные векторы ортонормированы по А-метрике.

При преобразовании координат $\vec{q}=U\vec{\theta}$ или $\vec{\theta}=U^{-1}\vec{q}$ **преобразуются** также

вынуждающие силы по формуле $\vec{Q}=\left(U^T\right)^{-1}\vec{\Theta}$ или $\vec{\Theta}=U^T\vec{Q}$. В главных координатах уравнения движения будут выглядеть $\ddot{\theta}_i+\omega_i^2\theta_i=\Theta_i$.

Таким образом, в обычных координатах вынуждающая сила, действующая по одной координате, оказывает влияние на движения по другим координатам. В то же время в главных координатах каждая вынуждающая сила проявляет влияние только по координате ее действия.

Следует также упомянуть **теорему Релея о поведении собственных частот консервативных систем**: при увеличении жесткости системы или уменьшении ее инерции собственные частоты увеличиваются.

Есть и другие теоремы. Например, **теорема о поведении собственных частот при изменении жесткости**.

Пусть даны две механические системы:

$A\ddot{q}+\Gamma\dot{q}+Kq=0$ и $A\ddot{q}+\Gamma\dot{q}+K'q=0$.

Систему будем называть более жесткой, если $(q,K'q)\geq(q,Kq)$ при любой $q\neq 0$.

Теорема: собственные частоты менее жесткой системы не превосходят собственных частот более жесткой.

Есть еще **теорема о поведении собственных частот при изменении массивности**.

Систему будем называть более массивной, если $(\dot{q},A'\dot{q})\geq(\dot{q},A\dot{q})$ при любой $\dot{q}\neq 0$.

Теорема: собственные частоты более массивной системы не превосходят собственных частот менее массивной.

Из соображений здравого смысла эти теоремы понятны. Простым и наглядным примером является массивный шарик на жесткой пружинке.

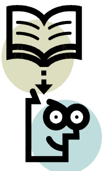
Домашнее задание. Построение АФХ, амплитудной, частотной, фазовой характеристик.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.

Тяжело в учении, легко в бою. (А.В. Суворов)

СУВОРОВ Александр Васильевич (1730-1800). Автор военно-теоретических работ ("Полковое учреждение", "Наука побеждать"). Создал оригинальную систему взглядов на способы ведения войны и боя, воспитания и обучения войск. Стратегия Суворова носила наступательный характер. Развил тактику колонн и рассыпного строя. Не проиграл ни одного сражения.

ВОПРОСЫ



Дорогие студенты и студентки!

С помощью нижеследующего списка ключевых понятий, определений и теорем по различным темам, предлагается проверить свои знания. Что вы могли бы рассказать по какому-либо вопросу, будучи на экзамене?

Самый лучший вариант: выучить и знать наизусть формулировки и формулы, ориентироваться в методах решения задач на данную тему.

Вопросы составлены на основе семинаров по теоретической механике МФТИ преподавателя Семендяева Сергея Вячеславовича.

Семинар №1.

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Стационарно заданные системы: консервативные, гироскопические, диссипативные (определенно-диссипативные).

Функция Релея. Уравнения Лагранжа.

Электромеханические аналогии на примере простейшей схемы.

Постулат Максвелла.

Семинар №2.

РАВНОВЕСИЕ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ

Положение равновесия.

Принцип виртуальных перемещений. Принцип возможных перемещений.

Различие формулировок.

Идеальные связи.

Принцип освобождаемости от связей.

Условие равновесия для консервативных систем.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Устойчивость и асимптотическая устойчивость.

Теорема Лагранжа (Лагранжа-Дирихле). Принцип Даламбера.

Первая теорема Ляпунова.

Вторая теорема Ляпунова.

Теорема Четаева. Однородность функции.

Семинар №3.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Малые колебания и линеаризация системы.

Положительная определенность форм кинетической и потенциальной энергии.

Процедура построения решения для системы с малыми колебаниями.

Вековое уравнение частот. Характеристический полином. Собственные частоты.

Общее решение для системы с малыми колебаниями.

Амплитудные векторы и их свойства: линейная независимость, A(C)-ортогональность, определенность направления, неопределенность модуля.

Главные колебания. Форма главных колебаний по амплитудным векторам. Фаза, противофаза. Максимальное число узлов.

Главные (нормальные) координаты. Запись кинетической и потенциальной энергии в главных координатах. Уравнения движения и решения. A(C)-ортонормированность. Ранг системы в случае кратных собственных частот.

Семинар №4.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Угадывание амплитудных векторов в случае симметрии системы. Упрощение расчетов. Отсутствие необходимости записи векового уравнения для поиска частот.

Семинар №5.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

Асимптотическая устойчивость. Отрицательность действительной части корней характеристического уравнения (Гурвицев полином). Общий вид решений.

Необходимое условие асимптотической устойчивости.

Критерий Рауса-Гурвица.

Критерий Рауса-Гурвица в форме Льенара-Шипара.

Геометрический критерий Михайлова. Построение годографа Михайлова. Общий вид годографа Михайлова в случае устойчивости для различных степеней характеристического полинома. Поиск корней слева и справа от мнимой оси.

Теорема Барбашина-Красовского.

Семинар №6.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ

Общее решение: решение однородной системы и решение частное.

Принцип суперпозиции.

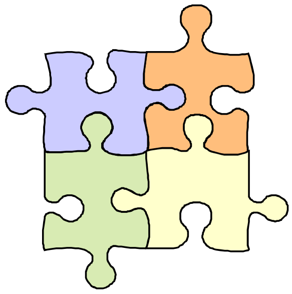
Алгебраическое дополнение и определитель матрицы коэффициентов линейной системы. Правило Крамера.

Амплитудно-фазовые характеристики. Амплитудные, фазовые характеристики.

Одномерный случай. Нулевой декремент затухания. Резонанс. Собственные, сопровождающие, вынужденные колебания.

Главные координаты. Запись вынуждающих сил в главных координатах.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА



[1]. Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980.

[2]. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001.

[3]. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

[4]. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001.

[5]. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.

Дополнительная литература:

- на сайте кафедры теоретической механики http://teormech.fizteh.ru или http://teormech.mipt.ru (зеркало)

- методические пособия (спрашивайте у преподавателя).

Успехов!